

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В. Ф. Зайцев

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
В ТОЧНЫХ И ГУМАНИТАРНЫХ
НАУКАХ**

Научное издание

 **ИЗДАТЕЛЬСТВО
НИЖНЫЙ ДОМ**

Санкт-Петербург

2006

ББК 22.12
З 17

*Печатается по рекомендации
Учебно-методического объедине-
ния по направлениям педагогиче-
ского образования Министерства
образования и науки Российской
Федерации*

Рецензенты: д. п. н. профессор **Власова Е. З.**
д. п. н. профессор **Горбунова И. Б.**

Зайцев В. Ф. Математические модели в точных и гуманитарных нау-
ках. – СПб.: ООО “Книжный Дом”, 2006. – 112 с. – ISBN 5–94777–060–1

Монография предназначена для студентов, магистрантов и преподавателей и может быть использована в качестве учебного пособия при изучении дисциплин, связанных с математическим моделированием в самых разнообразных отраслях прикладной науки. Оно также будет полезно при подготовке к семинарам, факультативным занятиям и при самостоятельном изучении вопросов данной тематики. Материал монографии может быть широко использован на лекциях и практических занятиях по курсам дифференциальных уравнений и математической физики. Специалистам-гуманитариям пособие может служить кратким руководством по применению математических методов в истории, лингвистике и музыковедении.

Основной целью настоящей монографии является изложение **ЛОГИКИ моделирования** на нетривиальных примерах, что способствует также повышению кругозора, эрудиции и глубины мышления будущих специалистов высшей квалификации.

Ил. 18. Библиогр. 49 назв.

ISBN 5–94777–060–1

© Зайцев В. Ф., 2006

© ООО “Книжный Дом”, 2006

Предисловие автора

Курс лекций “Математические модели в естествознании” читается в РГПУ им. А. И. Герцена магистрантам факультета математики 2-го года обучения в последнем семестре. Нетрадиционное название (в отличие от привычного “Математическое моделирование”) подчеркивает существенно иную направленность этой дисциплины. В самом деле, кратко рассматриваются различные типы моделей и их свойства, после чего проводится подробный анализ избранных конкретных объектов, явлений и процессов с сопоставлением им возможных моделей. При этом примеры заимствуются из самых различных областей человеческого знания – механики и физики, химии и биологии, астрофизики и экологии, а также из музыковедения, истории и лингвистики. Следует отметить, что автор отдал предпочтение моделям, которые входят в круг его интересов и послужили предметом его научных исследований. В частности, последний “блок” научных отраслей излагается на основе его брошюры “Биоритмы творчества” [1], впрочем, радикально переработанной. Большое внимание уделяется “тонкостям” задачи моделирования, поэтому в некоторых случаях процесс построения модели доводится только до уровня **содержательной** модели.

Вместе с тем в курсе лекций отсутствуют привычные разделы – качественные и численные методы, оценки точности и трудоемкости алгоритмов ЭВМ и др. Причина заключается в том, что семестровый курс вряд ли способен вместить глубокое изложение указанных разделов, а поверхностный обзор во многом дублировал бы материалы, уже изложенные в других курсах. Поэтому основной целью настоящего курса является изучение **логики моделирования** на нетривиальных примерах, что косвенно способствует также повышению кругозора, эрудиции и глубины мышления будущих специалистов высшей квалификации.

Материал спецкурса широко используется автором при чтении лекций и проведении практических занятий по курсам дифференциальных уравнений и математической физики. Это позволяет познакомить студентов с потребностями современных прикладных наук и показать на конкретных (и весьма непростых!) примерах, почему в математической практике возникает столь огромное число дифференциальных уравнений, многие из которых еще ждут своих исследователей.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность А. Н. Кусюмову (КГТУ им. А. Н. Туполева, Казань) и С. И. Сенашову (СибГАУ, Красноярск) за ценные обсуждения, а также группе магистров факультета математики РГПУ им. А. И. Герцена (выпуск 2006 года) за тщательную корректуру пробного издания.

Глава 1. Основные принципы моделирования

В первой главе рассматриваются принципы математического моделирования в той их части, которая касается определения, построения и свойств содержательных и математических моделей “в целом”. Изложение во многом опирается на очень полезную книгу А. Д. Мышкиса [2].

1.1. Определение и свойства моделей

Известно, что термин **математическое моделирование** применяется по отношению к области прикладной математики, включающей в себя как построение и исследование математических моделей, так и создание вычислительных алгоритмов и программ, реализующих эти алгоритмы на ЭВМ. Как уже указывалось, мы будем заниматься только первой сферой, тем более что для качественных исследований всегда предпочтительнее ограничиться пусть слегка упрощенной, но точной аналитической моделью, базирующейся на фундаментальных принципах (подобия, симметрии и др.).

Пусть мы собираемся исследовать совокупность S свойств некоторого реального объекта a математическими методами (термин **реальный объект** включает в себя как собственно объект, так и ситуацию, явление, процесс и т.д.). Для этого мы должны “перевести” объект a на математический язык, т.е. построить в каком-то смысле **отображение** $a \rightarrow a'$, где a' – математический объект (система соотношений, уравнений или геометрических фигур). Если исследование математического объекта a' позволяет сделать содержательные выводы о свойствах S реального объекта a , объект a' называется **математической моделью** объекта a относительно совокупности S его свойств.

Процесс построения математической модели проходит через несколько стадий, первой из которых является **наблюдение**. В результате наблюдения интересующих нас свойств реального объекта мы формулируем их на языке той отрасли науки, которая изучает эти свойства – строим механическую, физическую, химическую, биологическую, экономическую или иную **модель** объекта. Такая модель называется **содержательной**. При построении содержательной модели формулируются и используются соответствующие **гипотезы** (или **постулаты**). При этом несущественное для описания интересующих нас свойств отбрасывается. На основе содержательной модели и принятых определяющих соотношений мы выписываем соответствующие ей уравнения, переводя тем самым модель на формальный математический язык. В качестве определяющих соотношений, например, в физике, используются универсальные

физические законы (законы сохранения, симметрии, правила размерности – π -теорема Букингема) + феноменологические законы, присущие данной более узкой отрасли науки (типа законов Гука, Фурье, Стефана). Дальнейшие этапы моделирования относятся уже к сфере решения полученных уравнений и нами не рассматриваются. Заметим только, что, как правило, параметры, входящие в уравнения, имеют “прозрачный” физический смысл, поэтому в процессе решения мы можем привлекать дополнительные сведения.

Если мы нашли решение модельного уравнения, нужно провести анализ полученного решения с точки зрения физического смысла. По существу, это следующий (и необходимый!) этап математического моделирования – **интерпретация** (истолкование) результата исследования математической модели. Этот этап, как правило, включает в себя и **верификацию** модели – контроль правильности модели на основе сравнения результата с другими известными фактами, в частности, с экспериментальными данными.

Все указанные этапы взаимосвязаны – при построении математической модели мы априори ориентируемся на предполагаемый метод решения математической задачи и на качественные свойства получаемого решения (например, точное аналитическое решение, пригодное для глубоких исследований зависимостей от различных параметров, или численный результат для непосредственного применения в конструировании).

1.2. Принцип единства и множественности моделей

Рассмотрим простой механический пример. Пусть груз массы m колеблется в горизонтальной плоскости под действием пружины нулевой массы с жесткостью k . Предположим, что противодействующие силы (например, сила трения) пренебрежимо малы, а нас интересуют характер и частота колебаний.

Пусть ось x направлена вдоль линии колебаний, а начало отсчета соответствует равносному положению груза (рис. 1).

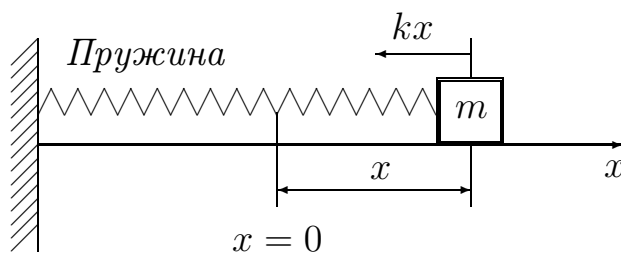


Рис. 1

Тогда в любой точке x на груз действует сила $F = -kx$. Согласно второму закону Ньютона ($F = ma$, a – ускорение) состояние рассматриваемой системы может быть описано дифференциальным уравнением

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1)$$

с общим решением

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t. \quad (2)$$

Здесь C_1, C_2 – произвольные постоянные, определяемые, например, из начальных условий. Интерпретация результата не представляет сложности – груз совершает гармонические колебания с центром в точке $x = 0$, с произвольной амплитудой и с частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Уравнение (1) является **математической моделью** описанного процесса. Требование простоты, очевидно, выполнено – трудно представить себе модель еще проще. Однако с адекватностью дело обстоит существенно сложнее: из уравнения (1) никак не следует способ вычисления амплитуды колебаний. Далее, в реальной системе колебания затухают (посторонняя вынуждающая сила отсутствует!), но из решения (2), напротив, следует постоянство амплитуды. Допущены и другие упрощения (например, линейность реакции пружины). Если мы захотим учесть влияние (предположительно малых) противодействующих сил, то, приняв гипотезу вязкого трения (сила торможения пропорциональна скорости), получим вместо (1) уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (3)$$

с малым коэффициентом трения f . Тем самым мы построили еще одну модель рассматриваемого процесса – она более адекватная, но и более сложная, чем модель (1), которая “вкладывается” в модель (3) при $f = 0$. В принципе, существует бесчисленное множество математических моделей одного и того же реального объекта, причем далеко не все они вложены друг в друга.

Вместе с тем имеет место и обратная картина: различные реальные объекты или различные содержательные модели могут иметь одну и ту же математическую модель. Например, заряд $q = q(t)$ в замкнутом контуре, последовательно содержащем сопротивление R , индуктивность L и емкость C (такой контур обычно называют колебательным), удовлетворяет уравнению

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (4)$$

С математической точки зрения уравнение (4) совпадает с уравнением (3) с точностью до переобозначений. Придавая другой физический смысл входящим в уравнения (3) и (4) переменным и константам, мы получим общее модельное уравнение, описывающее всевозможные **линейные осцилляторы**. Поэтому вместо исследований колебаний сложной механической системы мы можем провести измерения в соответствующим образом подобранной электрической цепи, имеющей такую же математическую модель. На этом основано действие различных **аналоговых устройств**, в том числе вычислительных, принципиально отличающихся от цифровых ЭВМ. Итак, существует множество реальных объектов, описываемых одной и той же математической моделью.

Сформулированные в двух предыдущих абзацах основополагающие принципы иногда формулируются как общий **принцип множественности и единства моделей**.

1.3. Основные требования к модели

Важнейшим требованием, предъявляемым к модели, является требование ее **адекватности**, т. е. правильного соответствия изучаемому реальному объекту a относительно выбранной системы S его свойств. Под этим прежде всего понимается

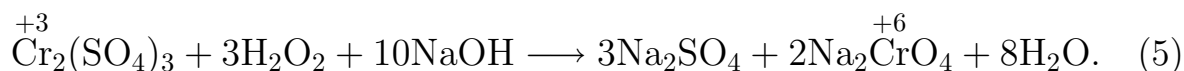
- 1) правильное качественное описание рассматриваемых свойств объекта: например, на основании исследования модели сделать правильный вывод о направлении изменения каких-либо количественных характеристик этих свойств, о их взаимосвязи, о характере колебаний объекта, об устойчивости его состояния или эволюции и т.п.

Кроме того, в требование адекватности обычно входит и

- 2) правильное количественное описание этих свойств с некоторой разумной точностью.

В соответствии с тем, ставится условие 2) или нет, говорят соответственно о **количественных** или **качественных моделях**. Вместо количественной адекватности говорят также о **точности модели**.

Немаловажно также требование **правдоподобности модели**. Оно тесно связано с требованием адекватности, однако далеко не эквивалентно ему. Покажем это на простом примере. Рассмотрим уравнение окислительно-восстановительной реакции, хорошо известное из школьного курса химии



Это довольно точная количественная модель, но как качественная не выдерживает никакой критики. Дело в том, что уравнение (5) абсолютно неправдоподобно, так как предполагает, что в одной точке сталкиваются сразу 4 (!) молекулы – одна молекула сульфата хрома (3) и 3 молекулы перекиси водорода, не считая 10 молекул едкого натра (можно, конечно, просто считать, что реакция проходит в сильнощелочной среде). Поэтому модель (5) является по существу, “черным ящиком” – мы знаем, что происходит на “входе” и что получается на “выходе”, тогда как истинный механизм реакции остается неизвестным (в силу высокой скорости реакции в растворе, присущей многим неорганическим реакциям, можно предположить, что она носит цепной характер). Критерий правдоподобия весьма полезен для отбраковки нереальных гипотез при разработке математических моделей, особенно в сфере гуманитарных наук, где количественные критерии пока не в состоянии обеспечить надежную оценку адекватности.

Следующим важным требованием является требование **достаточной простоты**. На первый взгляд, это требование прямо противоречит адекватности – чем модель сложнее, тем более подробно она описывает реальный объект, так как мы можем учесть большее число факторов. Так, модель (3) более адекватна, чем модель (1): мы можем уточнить влияние малого трения на частоту колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{f^2}{4mk}\right)} \sim \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{f^2}{8mk}\right)}.$$

Вместе с тем часто возникают случаи, когда усложнение модели одновременно снижает ее адекватность. Рассмотрим задачу о колебании маятника. Если пренебречь потерями на трение, она приводит к уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k \sin y = 0. \quad (6)$$

В предположении малости амплитуды колебаний (величины отклонения маятника от точки равновесия) обычно полагают $\sin y \sim y$, в результате чего получаем точную копию уравнения (1). Однако точность такой линейризованной модели оказывается в ряде случаев явно недостаточной. И в уравнение добавляют второй член разложения функции $\sin y$ в ряд Тейлора

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k \left(y - \frac{y^3}{3!} \right) = 0, \quad (7)$$

а если результат по-прежнему неудовлетворителен, то и третий

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \right) = 0. \quad (8)$$

Внимательное рассмотрение получившихся моделей приводит нас к выводу, что модель (7) ничем не проще модели (6), так как решение обоих уравнений можно записать через эллиптические функции. Модель же (8) оказывается значительно сложнее – общее решение представимо через гиперэллиптические интегралы, которые изучены явно недостаточно для использования в приложениях. А по адекватности модели (7) и (8) явно уступают модели (6): как по точности (модель (6) учитывает реальную траекторию движения конца маятника), так и по качественным характеристикам (в модели (6) вторая производная пропорциональна функции, ограниченной на всей прямой, что соответствует действительности, тогда как в моделях (7) и (8) это условие не выполняется). Легко видеть, что к некорректным моделям (7) и (8) мы приходим из-за шаблонности мышления – алгебраические функции кажутся предпочтительнее, чем трансцендентные.

Опишем вкратце другие требования к моделям. Свойство **полноты** математической модели состоит в том, что эта модель дает принципиальную возможность с помощью математических методов получить все интересующие нас утверждения. Так, модель (1) полна, если нас интересует только частота колебаний. Если нас интересует еще и амплитуда, то эта модель будет неполной. Свойство **продуктивности** следует из доступности **исходных данных** – параметров и зависимостей, которые мы задаем априори. Если мы не можем реально измерить и тем самым задать исходные данные, то решение задачи математического моделирования даст нам ответ на вопрос – какими свойствами **могут** обладать объекты рассматриваемого класса, но описание конкретного объекта может оказаться затруднительным. Требование **робастности** означает устойчивость относительно погрешностей в исходных данных или в выборе оценочных шкал. Проверка на робастность может быть одним из важных компонентов верификации модели.

Наконец, желательным (хотя и необязательным) является свойство **наглядности** математической модели. Под этим подразумевается непосредственный содержательный смысл ее компонент, что позволяет в ряде случаев использовать эту информацию для более успешного решения модельного уравнения. Заметим, что всякая хорошая модель является для талантливого исследователя источником новых идей, а в ряде случаев и результатов, получение которых при разработке этой модели не планировалось. Такими результатами стали известные в истории науки открытия “на кончике пера”. Этот раздел мы закончим словами академика А. Н. Тихонова: “опыт показывает, что во многих случаях правильно выбрать модель – значит решить проблему более чем наполовину” [3].

1.4. Классификация моделей

1. Структурные и функциональные модели. Обычно в математической модели отражается структура (устройство) реального объекта, интересующие нас свойства и взаимосвязи компонентов. Такая модель называется **структурной**. Если же модель отражает только то, как объект функционирует, в частности, как реагирует на внешние воздействия, она называется **функциональной** или иначе “**черным ящиком**”. Часто в этом случае исходными данными является “сигнал на входе”, объектом моделирования – “сигнал на выходе”. Пример “черного ящика” приведен в п. 2.

2. Дискретные и непрерывные модели. Хорошо известно, что различные реальные переменные могут быть двух основных типов – дискретные, когда точка, отвечающая заданному значению переменной, всегда имеет окрестность, не содержащую никаких других значений этой переменной, и непрерывные, когда переменная принимает все значения из некоторого интервала. Значения дискретной переменной можно перенумеровать, тогда как значения непрерывной переменной имеют мощность континуума. Точно так же и модели – как содержательные, так и математические – могут быть либо дискретными, либо непрерывными, хотя между этими типами никакого принципиального барьера нет. Дело в том, что при непосредственной работе с моделью (уточнении или видоизменении) дискретная картина может стать непрерывной и обратно. Очевидно, то же может произойти и в процессе решения математической задачи (при этом естественно происходит и смена математического аппарата: конечные разности \longleftrightarrow производные, конечные суммы \longleftrightarrow интегралы). Классическим примером “дуализма” дискретного и непрерывного является моделирование жидкости по Лагранжу и по Эйлеру – в подходе Лагранжа каждая частица в отдельности характеризовалась своим набором координат и скоростей $x_n(t), y_n(t), z_n(t), \dot{x}_n(t), \dot{y}_n(t), \dot{z}_n(t)$, тогда как в подходе Эйлера жидкость рассматривалась как **сплошная среда** и характеризовалась **полем** скоростей $\mathbf{v}(x, y, z)$. Лагранжев подход безусловно проще, но приводит к очень большому (в идеале – бесконечному) набору модельных уравнений. В эйлеровом подходе число уравнений измеряется единицами, но возникает принципиальная нелинейность из-за наличия субстанциональной части в полной производной по времени

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{a}.$$

Переход от дискретной модели к непрерывной называется осреднением, обратный – дискретизацией. Осреднение применяется также в непрерыв-

ных моделях для упрощения быстроколеблющихся зависимостей. Так, в небесной механике (теория движения искусственных спутников) помимо перехода от текущих декартовых координат к оскулирующим, проводится осреднение за период обращения или по нескольким периодам с тем, чтобы скомпенсировать короткопериодические колебания орбит. Вообще, подобные переходы могут существенно упростить исследование, однако они могут и внести неадекватность в модель.

3. Линейные и нелинейные модели. Модель называется **линейной**, если выполняется **принцип линейной суперпозиции**, т. е. решением является всякая линейная композиция других решений (с произвольными постоянными коэффициентами). Это свойство существенно упрощает построение и исследование решения математической задачи – мы хорошо знаем структуру и свойства общего решения, для построения частных решений существует множество весьма эффективных методов (например, метод разделения переменных – метод Фурье – в классической математической физике). Однако следует помнить, что большинство феноменологических законов, которые применяются при моделировании – закон Гука, закон Ома, закон теплового расширения – линейны лишь в первом приближении. Поэтому линейные модели, как правило, оказываются несостоятельными при анализе реальных объектов в околокритических областях, при значениях параметров, которые уже нельзя считать малыми и т. п. Общеизвестным примером являются релятивистские модели, которые справедливы, когда величиной v/c нельзя пренебречь по сравнению с единицей (v – скорость объекта, c – скорость света). Пример линейных и нелинейных моделей механических колебаний приведен выше в п. 3.

Приближенная замена нелинейных соотношений линейными, т. е. **линеаризация** широко распространена не только в математическом моделировании, но и в других разделах математики. Так, в групповом анализе дифференциальных уравнений при поиске автопреобразований (т.е. преобразований уравнения “в себя”) обычно переходят к бесконечно-малым (инфинитезимальным) преобразованиям, найти которые оказывается гораздо легче, чем конечные, так как определяющие уравнения для их поиска **линейны**. Не случайно оператор полной производной

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(k)}}$$

в ряде литературных источников называется **оператором универсальной линеаризации**.

4. Детерминированные и вероятностные модели. Математическая модель может включать случайные компоненты – случайные ска-

лярные или векторные величины, случайные функции и т. п., удовлетворяющие статистическим законам. Такие модели называются **вероятностными** или **стохастическими**, в отличие от **детерминированных** моделей, которые таких компонентов не содержат. Вероятностные модели изучаются с помощью методов теории вероятностей.

5. Статические и динамические модели. Обычно различают также **статические** и **динамические** модели. Для второго типа моделей предметом изучения является изменение рассматриваемого объекта во времени. В частности, многие динамические модели представляют собой уравнения в частных производных следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots \right),$$

которые называются **эволюционными**.

1.5. Математическая адекватность модели

В данном разделе мы коснемся вопроса, казалось бы, достаточно отвлеченного: какой метод решения модельного уравнения должен выбрать исследователь? С математической точки зрения, например, безразлично, разложить ли решение в ряд Тейлора, в ряд Фурье или использовать другие ортогональные разложения – надо лишь проверить, будет ли этот ряд сходиться в нужном интервале.

В качестве примера рассмотрим уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Как известно, использование метода разделения переменных (ряда Фурье) приводит к разложению решения в ряд Фурье, который имеет прозрачный физический смысл – каждая гармоника решения может быть “услышана” в отдельности. Вместе с тем ничто не мешает нам применить численный метод решения этого уравнения и записать разложение в ряд Тейлора. И становится очевидным, что использование “нефизического”, неадекватного метода решения превращает удачную структурную модель, по существу, в “черный ящик”.

В то же время для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

решение в виде разложения в ряд Фурье по \sin, \cos имеет гораздо более туманный смысл. Можно, конечно, говорить о тепловых волнах и

т. п., но все-таки процесс распространения тепла имеет монотонный характер. И не случайно решения многих краевых задач для уравнения теплопроводности, записанные в виде рядов Фурье, очень плохо сходятся. Настолько плохо, что приходится догадываться, как выделить в замкнутом виде плохо сходящуюся часть.

Хорошей параллелью к вышесказанному является историческое “противостояние” системы мира Птолемея и системы мира Коперника [4]. Заметим, что с чисто математической точки зрения обе системы **абсолютно эквивалентны!** В самом деле, добавление достаточного количества эпициклов и дифферентов позволяет добиться в системе Птолемея сколь угодно высокой точности описания видимого положения планет и их спутников в Солнечной системе. Другое дело, что эта система больше ничего описать не может, и, тем более, с ее помощью ничего нельзя прогнозировать, тогда как на основе системы Коперника можно найти все параметры орбит всех объектов Солнечной системы, а также обнаруживать еще не найденные объекты (вспомните открытие планеты Нептун “на кончике пера”). Тем не менее, и в той, и в другой системе уточнение производится, по существу, методами теории возмущений, что и привело к известным трудностям в решении задачи об устойчивости Солнечной системы – в разложениях появляются вековые (секулярные) члены вида $t \sin t$ и т. п.

Поэтому одной из задач специалиста по математическому моделированию является построение **промежуточных моделей**, имеющих ясный физический смысл и решение модельных уравнений в замкнутом аналитическом виде. Примером большого успеха, достигнутого в данном направлении, является построение модельных орбит в теории движения искусственных спутников Земли [5]. Как известно, спутник “в основном” движется по законам Кеплера, однако на него действуют возмущающие силы:

- 1) нецентральность поля тяготения Земли;
- 2) тормозящая атмосфера Земли;
- 3) влияние Солнца и Луны, “солнечный ветер”.

Третьим фактором для невысокой орбиты можно пренебречь, второй фактор носит стохастический характер (не говоря уже о том, что дневная и ночная плотность атмосферы может отличаться на порядок), поэтому обычно вычисляется “тренд”, и влияние атмосферы учитывается введением поправок, тем более, что это влияние имеет монотонный характер. А вот первый фактор действует практически на все параметры орбиты, и учет его для большинства орбит спутников представляет собой довольно сложную задачу. Термин “параметры орбиты” появился

здесь не случайно – вместо “быстрых” переменных $x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$ или их аналогов в других системах координат обычно используются **параметры оскулирующей орбиты** – большая полуось орбиты $a(t)$, эксцентриситет орбиты $e(t)$, долгота восходящего узла $\Omega(t)$, наклонение орбиты $i(t)$, аргумент перигея $\omega(t)$ и, в качестве “фиксатора” положения движущейся точки на эллипсе, например, эксцентриситетическая аномалия $E(t)$. Напомним, что оскулирующей называется мгновенная эллиптическая (кеплерова) орбита, по которой начнет двигаться спутник, если в данный момент исчезнут все возмущающие силы. Естественно, параметры оскулирующей орбиты являются “медленными” переменными, что существенно облегчает их вычисление и анализ.

Гравитационный потенциал Земли можно представить в следующей форме

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n I_{nm} \left(\frac{R_0}{r} \right)^n P_{nm} \left(\frac{z}{r} \right) \cos m(\lambda - \lambda_{nm}) \right\}. \quad (9)$$

Здесь r, z, λ – текущие цилиндрические координаты точки (начало координат совпадает с центром масс Земли, за основную плоскость принята экваториальная плоскость Земли), M – масса Земли, R_0 – средний экваториальный радиус Земли, f – гравитационная постоянная, I_{nm}, λ_{nm} – постоянные величины, зависящие от геометрии масс Земли, P_{nm} – присоединенные функции Лежандра.

Общая ограниченная задача небесной механики (а именно такую задачу мы должны решить для поиска орбиты искусственного спутника Земли) определяется следующей системой дифференциальных уравнений движения:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x = \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y = \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \end{cases} \quad (10)$$

$$U = \frac{fM}{r} + \mu R(x, y, z, t, \mu), \quad (11)$$

где r – радиус-вектор движущейся точки, ω – угловая скорость вращения системы координат, μR – пертурбационная функция, μ – малый параметр. Очевидно, потенциал (9) удовлетворяет условиям постановки задачи, так как $I_{20} = (1082, 48 \pm 0, 04) \cdot 10^{-6}$, а все остальные параметры I_{nm} еще на три порядка меньше.

Совершенно очевидно, что найти решение системы (10) в общем виде невозможно, тем более если учесть, что величины I_{nm}, λ_{nm} известны приближенно и, вообще говоря, могут меняться. Поэтому задача построения **промежуточной орбиты** (промежуточной модели) состоит в том,

чтобы подобрать вид потенциала (11), который удовлетворял бы следующим условиям:

- а) первые коэффициенты разложения пертурбационной функции совпадают с таковыми в формуле (9), остальные имеют тот же порядок величины;
- б) система (10) при такой пертурбационной функции решается аналитически в замкнутом виде.

Как правило, при подборе потенциала пренебрегают долготными членами, так как наибольшее влияние оказывают широтные члены (I_{n0} – так называемые зональные гармоники разложения), поэтому в формуле (9) полагают $m = 0$.

1. Задача двух неподвижных центров. Эта задача состоит в изучении движения пассивно гравитирующей материальной точки, притягиваемой двумя неподвижными точечными массами по закону Ньютона. Потенциал в этом случае равен

$$U = \frac{fM_1}{r_1} + \frac{fM_2}{r_2}, \quad M_1 + M_2 = M, \quad (12)$$

где

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a_2)^2},$$

причем

$$a_1 = -\frac{2M_2c}{M_1 + M_2}, \quad a_2 = -\frac{2M_1c}{M_1 + M_2}.$$

Параметры M_1, M_2, c выбираются так, чтобы потенциал (12) возможно менее отличался бы от потенциала (9). Разлагая (12) в ряд, аналогичный (9), можно убедиться, что надлежащим выбором параметров можно добиться равенства амплитуд 2-й и 3-й гармоник I_{20}, I_{30} , тогда как четвертая гармоника аппроксимирующего потенциала отличается от истинной знаком. Задача интегрирования уравнений движения с потенциалом (12) для плоского случая была решена Эйлером, для пространственного – Лагранжем и Якоби. Однако надо учесть, что четвертая гармоника дает в некоторых оскулирующих переменных вековые неравенства, поэтому задача двух неподвижных центров приемлема лишь для достаточно далеких спутников Земли. Заметим также, что при эволюции орбиты аргумент перигея ω может претерпевать скачок на π (разрыв первого рода), что тоже существенно осложняет все вычисления.

2. Способ Гарфинкеля. Для учета основных эффектов, обусловленных несферичностью Земли (в частности, быстрые вековые движения

восходящего узла и перигея) Б. Гарфинкель предложил искать потенциал в виде

$$U(r, \varphi) = f(r) + \frac{\Phi(\varphi)}{r^2}.$$

В этом случае (в сферических координатах r, φ, λ) решение системы можно найти в квадратурах. Тем не менее заметим, что в задаче Гарфинкеля учитываются только возмущения от второй зональной гармоник. Попытка учесть более высокие гармоники приводит к существенному усложнению пертурбационной функции, которая на малых интервалах времени остается малой величиной порядка $I_{20}e$ только при малом эксцентриситете орбиты.

3. Задача Баррара. Р. Баррар получил приближенное выражение для гравитационного потенциала Земли, комбинируя разложения некоторых функций в ряды по полиномам Лежандра и исходя из следующих предположений: а) планета представляет собой абсолютно твердое тело и обладает осью динамической симметрии; б) планета вращается вокруг оси, совпадающей с наименьшей осью центрального эллипсоида вращения. Потенциал можно записать в виде

$$U = \frac{fM}{r} - \frac{f(A-C)}{2r^5}(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Однако система уравнений движения с таким потенциалом не интегрируется в квадратурах. Поэтому обычно делается еще одно приближение и переход к сферическим координатам. Тогда получается следующее выражение

$$U = \frac{fM}{r} - \frac{fMz_c \sin \varphi}{r^2},$$

где $z_c = 209,9$ км. Система с таким потенциалом уже будет интегрироваться в квадратурах. Однако и этот подход не получил широкого распространения, так как вскоре была предложена обобщенная задача двух неподвижных центров.

4. Обобщенная задача двух неподвижных центров. Рассмотрим потенциал (12), предполагая, что постоянные a_1, a_2, M_1, M_2 – не вещественные, как следует считать из их механического смысла, а комплексные: вообще говоря, конкретный механический смысл, исходя из существа задачи, имеют их суммы – величины $M_1 + M_2 = M$ и $a_1 + a_2 = a$ должны (!) быть вещественны. В соответствии с формулами разложения потенциала (12) получим

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{r^n} P_n \left(\frac{z}{r} \right) \right],$$

где

$$\gamma_n = \frac{M_1 a_1^n + M_2 a_2^n}{M}.$$

Если начало координатной системы взять в центре инерции планеты, то первой сферической гармонике не должно быть, т. е. надо положить $\gamma_1 = 0$. Осталось потребовать, чтобы $\text{Im } M = 0$, $\text{Im } \gamma_n = 0$, $n = 2, 3, \dots$

Получившаяся система алгебраических уравнений имеет два решения. Первое – комплексное и соответствует значениям

$$\begin{cases} M_1 = \frac{M}{2}(1 + i\delta), & a_1 = c(\delta + i), \\ M_2 = \frac{M}{2}(1 - i\delta), & a_2 = c(\delta - i), \end{cases}$$

второе дает действительное решение

$$\begin{cases} M_1 = M(1 - \gamma), & a_1 = a\gamma, \\ M_2 = M\gamma, & a_2 = -a(1 - \gamma), \end{cases}$$

где $\gamma = M_2/M$.

Первое решение дает очень удачную аппроксимацию потенциала Земли – можно точно задать параметры I_{20} и I_{30}

$$c = \frac{\sqrt{-I_3^2 - 4I_2^3}}{2I_2} R, \quad \delta = \frac{I_3}{\sqrt{-I_3^2 - 4I_2^3}},$$

при этом значение $\gamma_4 = c^4(1 + \delta^2)(1 - 3\delta^2)$ оказывается очень близким к I_{40} и совпадающим по знаку. При $\delta = 0$ мы имеем частный случай, известный, как потенциал М. Д. Кислика. Он не учитывает асимметрию Земли относительно экваториальной плоскости, хотя и в этом случае промежуточные орбиты дают хорошее согласие с наблюдениями. Можно показать, что все остальные аппроксимирующие потенциалы, кроме потенциала Гарфинкеля, являются частными случаями обобщенной задачи двух неподвижных центров, которая интегрируется в сжатых сфероидальных координатах в терминах эллиптических интегралов.

1.6. Аналогия

В заключение раздела об общих принципах моделирования уместно остановиться на **аналогии** – мощном, но “обоюдоостром” инструменте. Заметим, что во многом именно на аналогии базируется принцип единства и множественности моделей, точнее, та его составляющая, которая декларирует возможность одним и тем же уравнением описывать самые разнообразные явления из различных областей естествознания.

Аналогия успешно применяется в тех случаях, когда исходные предположения при построении разных моделей совпадают. Так, классическая (линейная) математическая физика опирается на удивительно небольшое число модельных уравнений [6], причем составной частью большинства из них оказывается оператор Лапласа, который в декартовых координатах записывается в виде

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Например, для любого потенциального (безвихревого) векторного поля $\mathbf{u}(x, y, z)$ и плотностью источников $f(x, y, z)$ выполняются соотношения

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = f(x, y, z), \\ \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись тождеством $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0$, справедливым для произвольного скалярного поля $\varphi(x, y, z)$, вводим **потенциал** по формуле $\mathbf{u} = -\operatorname{grad} \varphi$ и получаем для него уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = -f(x, y, z), \quad (13)$$

или, в отсутствие источников, уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (14)$$

Уравнения (13) и (14) описывают стационарные процессы – распределение температуры внутри некоторого тела (φ – скалярное поле температур, $f(x, y, z)$ – величина, пропорциональная плотности тепловых источников), потенциальное течение жидкости (φ – потенциал скорости), электрическое поле стационарных зарядов (φ – электрический потенциал, $f(x, y, z) = 4\pi\rho$, где ρ – объемная плотность зарядов) и множество других.

Добавив к исходным предположениям закон Фурье и записав уравнение баланса тепла, легко можно получить нестационарный аналог уравнений (13) и (14) – уравнение теплопроводности, которое в случае однородной среды имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \Delta \varphi + f(x, y, z), \quad (15)$$

где a^2 – коэффициент температуропроводности. Уравнение (15) является одним из самых известных **ЭВОЛЮЦИОННЫХ** уравнений, т. е. уравнений, решение которых (эволюция процесса во времени) полностью определяется единственным начальным значением – состоянием в начальный

момент времени $\varphi(t_0) = \varphi_0(x, y, z)$. Абсолютно аналогично выглядит уравнение диффузии (при постоянном коэффициенте диффузии и с учетом закона Нернста) и нестационарное уравнение Шрёдингера (после отождествления физических величин с соответствующими операторами, о нем см. п. 2.2).

Для неоднородных сред модель немного усложняется, так как вместо лапласиана появляется оператор с переменными коэффициентами, и уравнение (15) приобретает вид

$$c\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} \varphi) + F(x, y, z, t).$$

Здесь $k = k(x, y, z)$ – коэффициент теплопроводности, $c\rho$ – теплоемкость единицы объема (легко видеть, что в уравнении (15) $a^2 = k/c\rho$).

Наконец, рассматривая построение уравнений, описывающих волны, заметим, что часто а priori предполагают, что решение представляет собой суперпозицию бегущих волн – прямой и обратной. Если потребовать, чтобы суперпозиция была линейной, то логично искать решение в виде

$$u = \Phi(\xi) + \Psi(\eta), \quad (16)$$

где ξ, η – волновые аргументы, различающиеся знаком перед переменной t , например, в случае одной пространственной переменной

$$\xi = x + vt, \quad \eta = x - vt. \quad (17)$$

Функция (16) является общим решением гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

которое преобразованием (17) приводится к уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Заметим, что точно такое же уравнение получается, если исходить из фундаментальных физических законов, добавив к ним закон Гука и предположение о малости отклонения струны от положения равновесия (т. е. рассматриваются малые колебания струны).

В случае трех пространственных переменных неоднородное волновое уравнение (уравнение Даламбера) имеет вид

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x, y, z, t). \quad (18)$$

К двум уравнениям вида (18) – одному скалярному и одному векторному относительно электрического и магнитного потенциала – приводится системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Если правая часть $F(x, y, z, t)$ является периодической функцией времени

$$F(x, y, z, t) = F_0(x, y, z)e^{i\omega t},$$

подстановка $u = we^{i\omega t}$ переводит уравнение (18) в уравнение Гельмгольца

$$\Delta w + k^2 w = F_0(x, y, z) \quad \left(k = \frac{\omega}{v}\right). \quad (19)$$

Уравнению (19) удовлетворяет амплитуда волны в пространстве.

Если в уравнении (18) $F = 0$, и $v = c$ (c – скорость света), то это уравнение описывает распространение электромагнитных волн (в частности, света) в вакууме. Подстановка $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $ict = x_4$ переводит гиперболическое волновое уравнение в эллиптическое уравнение Лапласа в 4-мерном пространственно-временном континууме (“мир Минковского”)

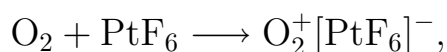
$$\Delta_4 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = 0.$$

Таким образом оказывается, что количество основных модельных уравнений в классической математической физики не превосходит десяти, и многочисленные явления и процессы описываются на основе глубоких аналогий между различными отраслями прикладных наук.

Аналогии в приведенных выше примерах основаны исключительно на фундаментальных законах и на выбранных исходных предположениях. Значительно сложнее ситуация в случаях, когда фундаментальный закон имеет, кроме количественной, качественную составляющую. Такой характер имеет, например, периодическая система элементов Менделеева. Она устанавливает фундаментальную систематику химических элементов и **декларирует** ряд **возможных** свойств элементов и **тенденции** их изменения при росте их атомного веса. Здесь применение аналогии может привести к грубой ошибке. Так, в 60-х годах XX века сообщалось, что соль семивалентного рения KReO_4 при интенсивном восстановлении металлическим калием в водно-этилендиаминовой среде способна перейти в соединение, в котором рений отрицательно одновалентен (!) [7]. Такой вывод сделан на основании аналогии с соединениями элементов подгруппы галогенов (хотя рений является элементом не главной, а побочной подгруппы). Дальнейшие исследования выявили наличие в продукте реакции ионов отрицательно одновалентного водорода,

т. е. свидетельство о гидридном характере соединения. В настоящее время оно уверенно идентифицировано как комплексный гидрид $K_2[ReH_9]$ с положительно семивалентным рением. Подобные ошибки являются следствием шаблонного мышления или заведомого предубеждения (“увидели то, что хотели увидеть”), что в еще большей степени свойственно исследованиям в области гуманитарных наук (см. далее – п. 3.2, 3.3 – проблемы дешифровки фетского диска и “синдром автографа”).

Другой пример относится не столько к применению количественной составляющей системы Менделеева, сколько к иллюстрации приоритета количественного над качественным. Исследуя реакцию кислорода с гексафторидом платины:



Бартлетт в 1962 г. предположил, что в аналогичную реакцию должен вступать и “инертный” газ ксенон (Xe). В самом деле, первый потенциал ионизации ксенона (12,10 эв) даже меньше, чем первый потенциал ионизации молекулы кислорода (12,20 эв). И первый же поставленный опыт привел к получению (при нормальных температуре и давлении, в вакууме) красно-оранжевых кристаллов $Xe(PtF_6)_x$, где $1 \leq x \leq 2$ [8]. С этого момента и начинается история изучения химии “нулевой” группы (или группы “инертных” газов). Эти элементы теперь во всех учебниках по праву занимают место в главной подгруппе восьмой группы периодической системы элементов (высшая степень окисления ксенона +8).

Глава 2. От псевдокристаллов до численности грызунов

В этом разделе мы рассматриваем примеры моделирования процессов, относящихся к сфере “точных” наук.

2.1. Взрыв расплавленной поваренной соли

1. Исходные данные. Изначально проблема возникла в целлюлозно-бумажной промышленности: время от времени, совершенно непредсказуемо происходили разрушительные взрывы содорегенерационных котлов (в среднем – один взрыв в год на одном из приблизительно 40 крупных производств в СССР). Помимо огромного материального ущерба (~ 1 миллиона руб. в год) некоторые из этих взрывов повлекли и человеческие жертвы.

Расследование неизменно приводило к одному и тому же выводу – взрыву всегда предшествует повреждение экранных труб охлаждения, при этом холодная вода попадает в “щелок” – расплавленную смесь солей NaCl , Na_2CO_3 , Na_2S , Na_2SO_4 , вызывая **паровой взрыв** содорегенерационного котла. Аналогичные явления происходили и на зарубежных производствах, и версия о паровом взрыве неизменно присутствовала в многочисленных работах западных ученых.

Однако нашелся один человек – инженер-теплотехник котлотурбинного института (ЦКТИ им. И. И. Ползунова) Г. Я. Алешин – который не поверил предложенной модели. Сомнение вызывала в первую очередь гигантская энергия взрыва, которую вряд ли могла обеспечить сравнительно небольшая масса пара, пусть и очень перегретого.

2. Модельный эксперимент – 1.

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ!

Ввиду крайней опасности ни в коем случае не пытайтесь повторить подобные эксперименты в домашних условиях!

Для проверки модели парового взрыва была создана простейшая экспериментальная установка (рис. 2), состоящая из тигля, в котором плавилась соль (чистая NaCl , $T_{\text{плавл.}} = 810^\circ\text{C}$), и пипетки с холодной водой. Уже первые эксперименты показали, что эффект падения капли в плаву имеет стохастический характер – в ряде экспериментов было слышно шипение при испарении воды, в других – хлопок с выбросом плава, в третьих – взрыв с разрушением тигля и разлетом осколков, сопровождаемым характерным звуком преодоления звукового барьера.

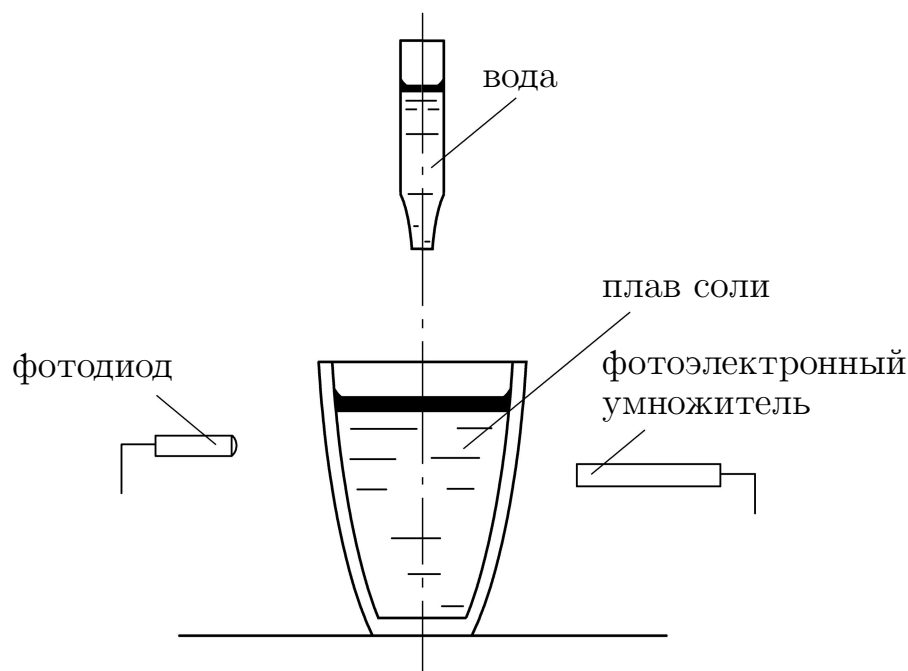


Рис. 2

Для оценки энергетики взаимодействия воды и плава рядом с тиглем была укреплена насадка с фотодиодом, а шкала регистрирующего прибора отградуирована на измерение температуры.

Первые же измерения полностью опровергли “теорию парового взрыва” – при контакте воды с плавом последний **нагревался** на ~ 200 °! Точку на этом этапе поставил холодный стальной шарик, брошенный в плав и вызвавший типичный хлопок – какой уж тут паровой взрыв, если пара нет... По существу, первый модельный эксперимент стал проверкой имеющейся модели на **правдоподобность**. Необходимо было построить другую модель, а для этого – существенно увеличить количество и качество экспериментальных материалов. Новая экспериментальная установка была уже практически профессиональной (рис. 3) – взрывы проводились в герметическом термостате, в атмосфере чистого аргона; для регистрации излучения были вмонтированы 2 фотодиода: один с инфракрасным (ИК) фильтром, второй – с ультрафиолетовым (УФ). Одновременно был произведен спектральный анализ поваренной соли (показавший абсолютную идентичность спектрально чистой NaCl до и после взрыва). Все эти дополнительные меры принимались для “отсечения ложных гипотез” (например, химического взаимодействия, что, впрочем, и так представлялось крайне невероятным), а также для уточнения спектра излучения в момент взрыва.

3. Модельный эксперимент – 2. Как выяснилось впоследствии, ключевым оказался эксперимент с датчиком УФ-излучения: при попа-

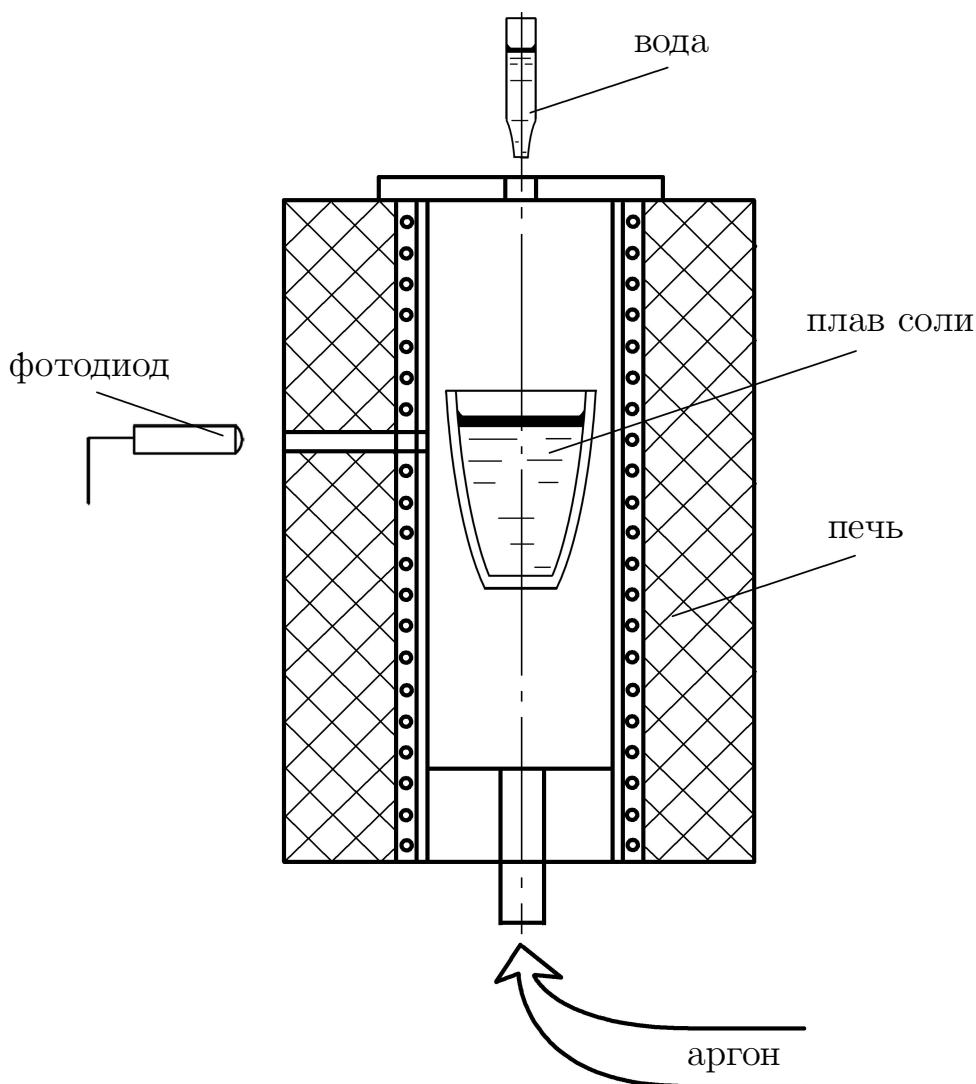


Рис. 3

дании капли воды в плав сначала возникал кратковременный всплеск УФ, а через несколько миллисекунд – резкий нагрев (рис. 4), практически одновременно со взрывом. Проведенные эксперименты с другими солями тоже дали любопытный результат: взрыв возникает только в бинарных солях (NaCl , Na_2S , KCl), тогда как в солях с кислородсодержащим анионом (Na_2SO_4 , Na_2CO_3) происходит сравнительно медленное нарастание ИК-излучения, сопровождающееся быстрым затвердеванием плава (в ряде случаев фиксировалась затвердевшая реактивная капля-выброс из плава). УФ-излучения в этих случаях не было. Далее, был оценен энергетический эффект – при взрыве выделялась энергия порядка 30 кДж/моль ($1 \text{ моль NaCl} \sim 58 \text{ г}$).

Известно, что NaCl абсолютно прозрачен в видимом и ближнем УФ-диапазоне, за исключением двух УФ-участков, в которых есть **ЭКСИТОН-**

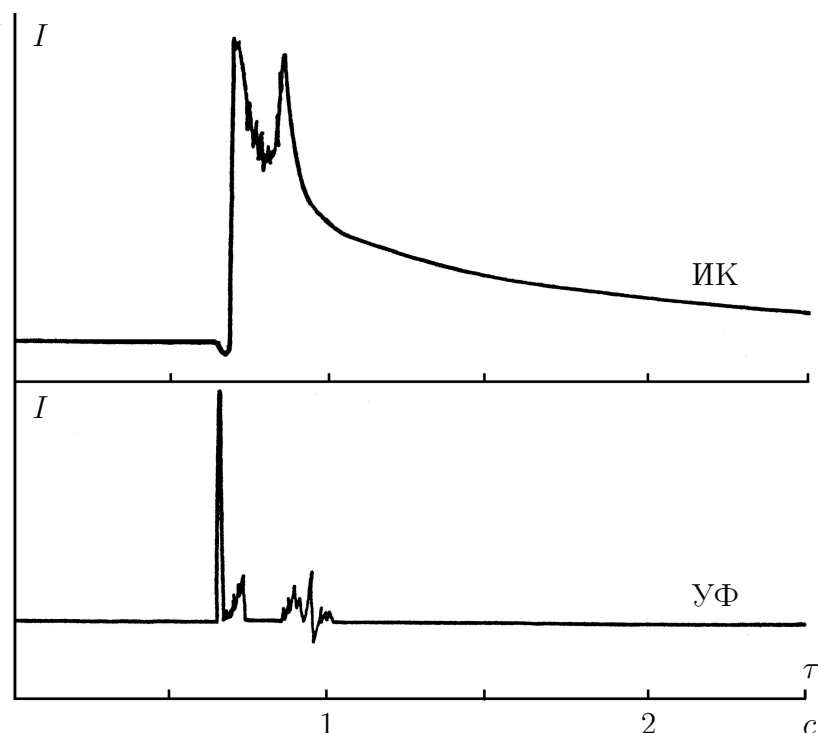


Рис. 4. Осциллограмма регистрации излучения при взрыве в кварцевом стакане (NaCl)

ные линии. Напомним, что экситоном называется связанное водородоподобное состояние “электрон-дырка” (псевдоатом), возникающее при дефекте в кристалле. Экситоны могут мигрировать по кристаллической решетке и, тем самым осуществлять перенос энергии. Гипотеза о причастности экситонов к исследуемому явлению переросла в уверенность, когда выяснилось, что эти связанные состояния возникают **исключительно в бинарных солях**. Дальнейшее изучение литературных источников выявило следующие факты:

- 1) даже в пара́х (!) NaCl одиночных молекул только 74%, зато присутствует димер Na_2Cl_2 (25%) и тример Na_3Cl_3 (1%);
- 2) при кристаллизации NaCl выделяется энергия фазового перехода $7,9 \text{ ккал/моль} \sim 33,2 \text{ кДж/моль}$.

Поэтому вполне логично было предположить, что при температурах, ненамного превосходящих точку плавления, расплав соли содержит, в основном, ассоциированные молекулы – своеобразные “зародыши” кристаллической решетки, а наблюдаемый эффект объясняется концентрацией скрытой энергии фазового перехода с последующим быстрым ее “сбросом”. Осталось только найти механизм накопления (накачки) энергии кристаллизации всего объема расплава.

4. Модельный эксперимент – 3. Для изучения динамики процесса была использована скоростная кинокамера; обработка наблюдений около сотни экспериментов позволила сделать следующие выводы:

- 1) в момент падения капли в расплав возникает локальное возмущение, которое в дальнейшем распространяется до стенок тигля и движется вниз со скоростью энтропийной волны (~ 13 м/с);
- 2) возмущение имеет вид тонкого горизонтального слоя (толщина < 1 мм), обладающего иной оптической плотностью, нежели окружающий его плав;
- 3) взрыв возникает по достижении движущимся слоем дна тигля.

В выводах описана идеальная ситуация, сопровождающаяся взрывом (рис. 5). Тем не менее во многих экспериментах движущийся слой во-

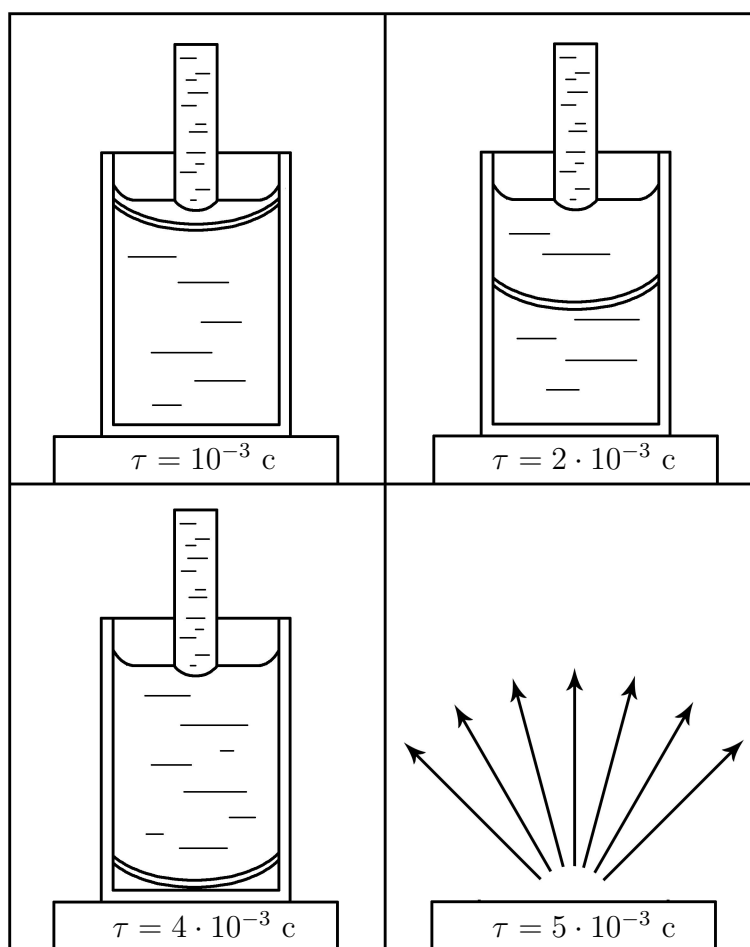


Рис. 5. Схематическое изображение процесса, наблюдаемого при кинорегистрации через время τ после контакта воды с NaCl

обще не возникал, либо возникало несколько фронтов локальных волн, одна из которых опережала другие. В ряде случаев отмечалась корреляция вида волн и места падения капли – наиболее сильный эффект

наблюдался при падении капли точно в центр тигля. Это наводило на мысль о резонансном характере явления.

В солях со сложными анионами, в которых взрыв никогда не наблюдался, вместо тонкого слоя возникала просто движущаяся линия раздела двух сред, а по достижении этой линии дна происходила сверхбыстрая кристаллизация плава.

5. Содержательная модель. Можно предположить, что в момент попадания холодного объекта (капли воды) на поверхность плава в последней возникает локальная область повышения давления, температура в которой существенно снижается (вплоть до температуры ниже точки затвердевания). В этой области появляется тонкий слой **псевдокристалла**, который остается “жидким”, но характеризуется высокой упорядоченностью ионной структуры (сравните с “шугой” на реках и каналах – это и вода и не вода, и снег и не снег, и лед и не лед). В бинарных солях возникновение псевдокристалла сопровождается массовым образованием экситонов из-за большого количества дефектов кристаллической структуры. Эти экситоны и являются первоначально инструментами накачки – накопителями энергии, а также дают всплеск УФ-излучения. Слой псевдокристалла проходит через толщину плава, “собирая” энергию фазового перехода всей массы соли. Конечно, остаются еще неясными ответы на ряд вопросов: а) почему энергия не уходит из слоя (эффект полного внутреннего отражения?), б) каков механизм дальнейшей накачки – одни только экситоны вряд ли обеспечат столь высокую (20 эв/атом) концентрацию энергии (многофотонный процесс?) и в) за счет какой энергии псевдокристалл за волновым слоем опять превращается в расплав (энергия вакуума?). Однако очевидно – достигнув дна, волновой слой (по существу – волна кристаллизации) разрушается, высвобождая всю накопленную энергию, часть которой идет на быстрый нагрев плава (ИК-излучение, запаздывающее по отношению к УФ-импульсу в точности на время прохождения слоя от поверхности до дна тигля).

В солях с кислородсодержащими анионами отсутствует главный фактор начала процесса – экситоны (электроны в сложных анионах делокализованы). Поэтому не происходит накопления энергии, а по мере движения линии раздела весь объем соли становится псевдокристаллом. По достижении линией раздела дна тигля она отражается в виде уже ударной волны и “закрепляет” кристаллизацию. Избыток энергии “раскачивает” связи $C=O$ и $S=O$ в молекулах Na_2CO_3 , Na_2SO_4 ; в течение некоторого времени эта энергия рассеивается ИК-излучением [9].

Рассматриваемое явление имеет энтропийную природу и может рассматриваться как бегущая уединенная волна (солитон), связанная с термомеханической и радиационной нестабильностью среды (ионный рас-

плав, находящийся в тепловом взаимодействии с окружающими телами). Подчеркнем: протекающий при этом термодинамический процесс является **неравновесным**, что и приводит к кажущимся парадоксам (например, восстановление плава в жидком состоянии после прохождения заднего фронта волнового слоя при взрыве).

6. Непосредственные выводы. Естественно, основной задачей исследования являлась ликвидация опасности взрывов в промышленности. Здесь содержательная модель уже дает ответ – необходимо разрушать “главную моду” волны, вставляя, например, в котел наклонные стержни, расположенные случайным образом [10]. Эта рекомендация была полностью подтверждена в ходе полупромышленных испытаний с бочками, содержащими по 5 кг расплава NaCl. Не было зафиксировано ни одного взрыва в бочках, оснащенных “гасителями резонанса”, тогда как в контрольной группе бочки взрывались регулярно.

Помимо этого, был проведен контрольный эксперимент с роданидом калия KCNS. Анион CNS^- , как галогеноподобный, должен иметь локализованный электрон и, следовательно, образовывать экситоны. Поэтому ожидалось, что роданид можно будет использовать в низкотемпературных экспериментах ($T_{\text{плавл.}} = 173,2^\circ\text{C}$). Однако, несмотря на то, что эффект явно имел место, замены поваренной соли пока не нашлось – вместо взрыва роданид начал разлагаться, что соответствует сильнейшему нагреву ($T_{\text{разлож.}} \sim 500^\circ\text{C}$!). К тому же продукты разложения роданидов содержат сильноядовитые летучие продукты. Так что контрольный эксперимент лишь косвенно подтвердил галогеноподобность роданид-иона.

Надо заметить, что библиографический поиск не прекращался на протяжении всего времени работы над моделью, и оказалось, что подобные явления наблюдались и в других отраслях промышленности:

- 1) в Инструкции по технике безопасности Норильского горно-обогатительного комбината была обнаружена следующая статья: “Категорически запрещается допускать перевероты и вызывать обрушение шихтовых откосов”;
- 2) на металлургических комбинатах взрывались пятитонные ковши с расплавленным металлом при неправильно подобранном режиме охлаждения водо-воздушной смесью (заметим также, что при определенных условиях в ряде металлов, находящихся в жидкой фазе, отмечена ионная структура типа Na^+e^- или кластеров Pb_9^{-4} , Bi_9^{+5});
- 3) наблюдались взрывы криогенных углеводородов, которые объясняются с позиции предложенной модели через промежуточное образование свободных радикалов.

Если п. 2, 3 не нуждаются в комментариях, то п. 1 требует разъяснения. Шихтовыми откосами называются слипшиеся куски шихты, приставшие к внутренним верхним углам конвертера. Если засыпается в плав мелкоизмельченная шихта, никаких опасных явлений не происходит, а попадание твердого куска может вызвать взрыв. По-видимому, это хорошо знали составители инструкции, постаравшись по возможности обезопасить производственный процесс. Нет нужды объяснять читателю, что и в этом случае о паровом взрыве не может быть и речи.

7. Возможное следствие. Описанная модель может найти совершенно неожиданное применение в другой отрасли науки – геофизике. Общеизвестно, какую опасность представляют катастрофические извержения вулканов и землетрясения. Они происходят на фоне обычных, “рядовых”, происходят значительно реже последних, но существенно отличаются от них масштабом явлений – суммарная энергия может на несколько порядков превосходить таковую при “рядовом” извержении или землетрясении. Хорошо известны происшедшие в историческое время взрывы вулканов Санторин и Кракатау, первый из которых, по некоторым предположениям, уничтожил цивилизацию Атлантиды. Учитывая вышеизложенное, можно выдвинуть следующую гипотезу: при катастрофических извержениях (сопровождающихся взрывами) и землетрясениях происходит дополнительная “накачка” энергии, существенно усугубляющая последствия указанных явлений. Механизм этой накачки подобен описанному выше, а, следовательно, эффект существенно зависит от химического состава и свойств магмы в точке катаклизма. Инициировать взрыв может любая скала, упавшая в магму с “потолка” подземной полости, или проникновение воды (что, по-видимому, имело место при взрывах Санторина и Кракатау; энергетический эффект, по оценкам, существенно превосходил эффект от простого попадания воды в расплав).

2.2. Проблемы квантовой механики в релятивистской области

Рассмотрим пример построения релятивистской квантовой механики – модели, в которой линейность классической квантовой механики (принципиальное свойство, присущее ей “от рождения” и лежащее в основе всех построений) – противоречит столь же принципиально нелинейной теории относительности, законы которой вступают в силу, как только перестает выполняться неравенство $v \ll c$.

Конечно, квантовомеханический формализм предполагает переход от физической величины к соответствующему ей **линейному оператору**, но учитывая, что энергия свободной частицы в релятивистской механике

имеет вид

$$E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}, \quad (20)$$

оператор, соответствующий импульсу p , будет входить под знак квадратного корня – например, в одномерном случае:

$$\pm c \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 c^2}. \quad (21)$$

Трактовка этого корня вызывает самые большие сомнения.

В 1928 году П. А. М. Дирак, казалось бы, обошел это затруднение. Исходя из общих принципов:

- 1) релятивистской инвариантности,
- 2) линейности (для выполнения фундаментального принципа суперпозиции),
- 3) наличие производной по времени не старше 1-го порядка (чтобы состояние в данный момент определяло состояние во все последующие моменты времени),

он вывел уравнение (которое сейчас носит его имя), описывающее изменение во времени состояния свободной частицы со спином $1/2$ (электрона, μ -мезона и др.) в релятивистском случае

$$\sum_{(\mu)} \gamma_{\mu} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_{\mu}} + i \frac{mc}{\hbar} \psi(x) = 0, \quad (22)$$

где ψ – биспинор

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix},$$

т. е. выражение (22) представляет собой систему четырех уравнений. Другие величины, входящие в систему (22), определяются следующим образом: $\mu = 0, 1, 2, 3$; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ – пространственные координаты, $x_0 = ct$ – временная координата, γ_{μ} – матрицы Дирака, которые выражаются через матрицы Паули и единичную матрицу

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha} \\ -\sigma_{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4 независимых решения системы (22) описывают состояние частицы и соответствующей ей античастицы, каждое с двумя возможными проекциями спина на направление импульса ($\pm 1/2$). Из них можно получить и формулу (20) для энергии. Предсказанная Дираком вторая пара решений привела к обнаружению **позитрона**. Однако уравнение Дирака пригодно лишь для описания состояния легких частиц, так как не объясняет аномально высокого магнитного момента для более тяжелых частиц. Так, экспериментальное значение магнитного момента протона в 2,8 раза больше величины, следующей из уравнения (22).

Обратимся к классическому (нерелятивистскому) уравнению Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x, y, z, t) \psi \quad (23)$$

или, в одномерном случае,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x, t) \psi$$

(V – потенциал) и представим себе, что слагаемое со второй частной производной по x заменено выражением (21). Как решать такое уравнение?

Одним из вариантов стало формальное возведение этого уравнения в операторный квадрат, в результате чего получается уравнение Клейна-Гордона-Фока

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \hbar^2 c^2 \Delta \psi - m^2 c^4 \psi. \quad (24)$$

Из уравнения (24) также следует релятивистское соотношение для энергии (20), однако уравнением Клейна-Гордона-Фока можно описывать только частицы, не обладающие никакими дополнительными внутренними степенями свободы, т. е. **бесспиновые** (например, π - и K -мезоны). Более того, уравнение (24) – гиперболическое, тогда как уравнение Шрёдингера (23) – параболическое (эволюционное); решения уравнения (24) не определяются однозначно значением ψ в начальный момент времени (хотя однозначность постулируется в квантовой механике). Далее, энергия свободной частицы может принимать и отрицательные значения, что лишено физического смысла. Многочисленные попытки разрешения этих и ряда других парадоксов привели в конечном счете к созданию **квантовой теории поля** (КТП). В ней уравнение (24) рассматривается как уравнение **поля** (аналогично уравнениям Максвелла для электромагнитного поля), а процедура квантования превращает ψ из функции в **оператор**.

В квантовой теории поля возникают свои трудности. Применение теории возмущений приводит к появлению бессмысленных расходящихся

выражений; для того, чтобы избавиться от них, приходится применять процедуру **перенормировки**, заодно и вводя в уравнение параметры, имеющие непосредственный физический смысл. В рамках данной работы мы не можем подробно рассмотреть все сильные и слабые стороны КТП, равным образом не можем и углубляться в сложнейшие математические построения. Заметим только, что КТП позволила теоретически описать множество необъяснимых ранее эффектов и предсказать открытие новых элементарных частиц. Появление КТП привело к бурному развитию ряда отраслей функционального анализа, в частности, теории линейных операторов. В то же время непредвзятого исследователя не оставляет ощущение **искусственности** подхода, излишне многоступенчатых построений и обилия парадоксов и несуразностей. Иными словами, возникает естественное подозрение о **математической неадекватности модели**. Наибольшие проблемы возникают из-за **отсутствия гладкого предельного перехода к классической квантовой механике**.

В этом смысле весьма интересен подход, предложенный В. М. Лагодинским [11, 12]. Он предложил трактовать операторы типа (21) как псевдодифференциальные и представить квадратный корень в виде бесконечного ряда. В результате основное уравнение становится формально уравнением бесконечного порядка. Тем не менее было строго доказано, что это уравнение имеет ровно **два** фундаментальных решения, что полностью соответствует основным принципам построения классического уравнения Шрёдингера (23). При этом подходе существует гладкий предельный переход к классической квантовой механике, а решения простейших задач могут быть получены в замкнутой аналитической форме (!). Мы не будем здесь рассматривать математические аспекты предложенного подхода, но заметим, что он вполне может рассматриваться как альтернативный к КТП, и обладающий к тому же рядом преимуществ.

2.3. Некоторые проблемы эволюции звезд

В этом разделе мы покажем, как на основе правдоподобных рассуждений, законов физики и математических методов можно свести воедино достаточно “пестрые”, хотя и многочисленные данные наблюдений столь удаленных и недоступных объектов, как звезды. Совершенно очевидно, что в силу последнего замечания построенная модель вряд ли будет продуктивной – мы можем рассчитывать только на наблюдения, выполненные за период, ничтожно малый по сравнению с реальными временами жизни звезд. Немаловажно также то, что из-за конечности скорости света мы наблюдаем только то, что было в далеком прошлом, причем для каждой звезды период запаздывания индивидуален и опреде-

ляется ее расстоянием до Земли, которое для большинства наблюдаемых космических объектов известно весьма приблизительно. Таким образом, сколько-нибудь значимый период эволюции звезды мы наблюдать вообще не можем.

Точное расстояние, так же как масса и радиус, уверенно измеряются непосредственно лишь для очень немногих звезд. Поэтому для подавляющего числа звезд единственным источником информации является приходящее к нам излучение. Оно дает некоторое представление о температуре и химическом составе поверхностных слоев звезд и о полной мощности излучения (светимости) для звезд с известным расстоянием до Земли. Непосредственная информация о физических условиях в звездных недрах практически отсутствует, хотя, возможно, удастся зафиксировать нейтринное излучение из центра Солнца.

Однако существует фактор, который очень помогает теоретикам-астрофизикам – огромное количество звезд, поддающихся наблюдениям. Оно настолько велико, что мы можем ограничиться расчетом эволюции некоторого усредненного представителя некоторого класса звезд вместо того, чтобы объяснять “устройство” отдельной звезды. Тем более, что по современным теоретическим идеям, лишь несколько характеристик звезды существенно определяют ее строение и эволюцию [13]. И даже среди этих немногих характеристик не все являются независимыми. Например, радиус, светимость и температура поверхности не независимы, так как энергия, излучаемая единицей поверхности звезды, определяется тем, насколько она горяча. Если рассматривать массу, светимость и температуру поверхности как три независимые величины, то можно нарисовать связывающие их две независимые диаграммы.

Диаграмма масса – светимость показывает, что подавляющее большинство звезд располагается в очень узкой полосе: более массивные звезды имеют более высокие светимости, чем менее массивные (рис. 6). Диаграмма спектр – светимость (иногда строятся диаграммы показатель цвета – светимость или температура – светимость) сложнее – на ней имеется несколько полос, соответствующих различным зависимостям между этими параметрами. Это, очевидно, свидетельствует о том, что имеется несколько классов звезд, существенно отличающихся своими физическими данными. Впервые такая диаграмма была построена для звезд ближайшей окрестности Земли Герцшпрунгом и Рёсселом и обычно называется **диаграммой Герцшпрунга-Рёссела** (диаграммой ГР, рис. 7). Можно предположить, что звезды на различных стадиях эволюции принадлежат различным классам на диаграмме ГР, а области “сгущения” на ней соответствуют устойчивым стадиям эволюции. Это предположение отвергает гипотезу об одновременном образовании всех

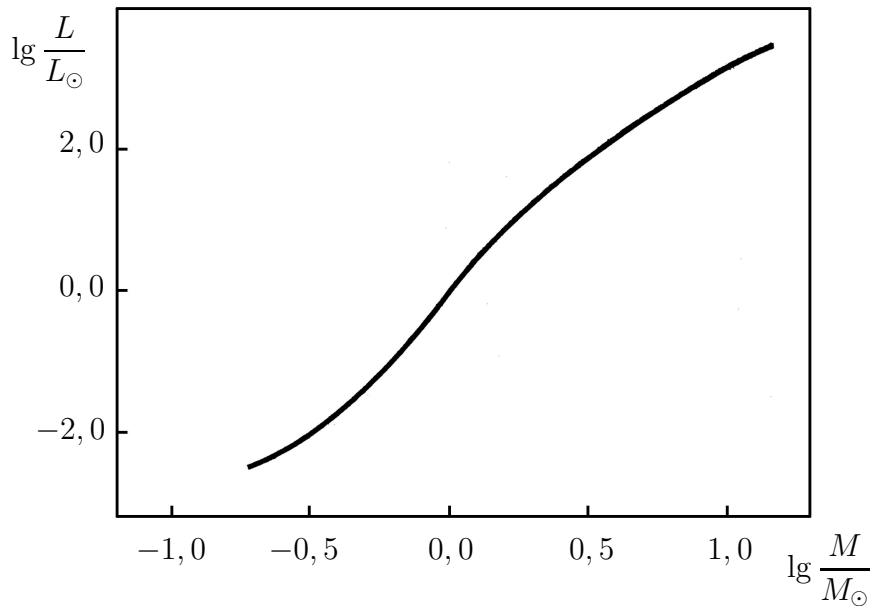


Рис. 6. Соотношение масса – светимость

звезд в процессе “первичного взрыва” и основано на следующих фактах:

- 1) исходя из спектральных характеристик множества звезд можно считать доказанным, что звезды имеют разный химический состав; имеется по крайней мере два подмножества звезд, одно из которых крайне “бедно” металлами и вообще тяжелыми элементами, второе – наоборот; поэтому первое подмножество состоит из “старых” звезд первого поколения, в которых небольшое количество металлов образуется уже в процессе эволюции с помощью известных ядерных реакций; второе подмножество состоит из звезд следующих поколений, в исходном “материале” которого априори имеется некоторое количество тяжелых элементов;
- 2) указанная в п. 1 классификация подтверждается и распределением “молодых” и “старых” звезд в нашей (и не только в нашей) Галактике – “молодые” звезды (так называемые звезды населения I) концентрируются к плоскости Галактики и в рассеянных звездных скоплениях (“плоская подсистема”), “старые” (звезды населения II) располагаются сферически симметрично и в шаровых звездных скоплениях, концентрируясь к ядру Галактики (“сферическая подсистема”);
- 3) “время жизни” наиболее горячих и ярких звезд исчисляется немногими миллионами лет, что ничтожно мало по сравнению с временем эволюции Вселенной; таким образом, “рождение” звезд происходит и в нашу эпоху, и места интенсивного звездообразования уверенно идентифицируются по ряду специфических признаков (O- и T-ассоциации).

Диаграмма ГР связывает между собой **абсолютные звездные ве-**

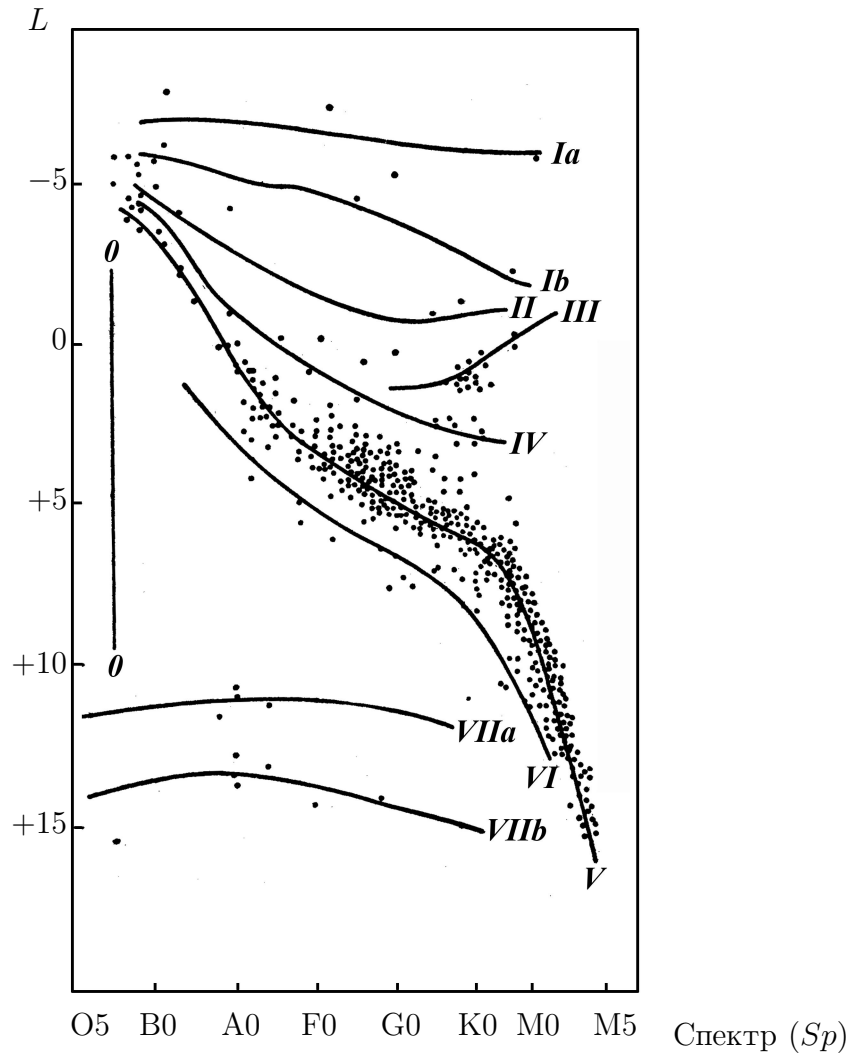


Рис. 7. Соотношение спектр – светимость (диаграмма Герцшпрунга-Рёссела)

личины M и спектры индивидуальных звезд (напомним, что абсолютной звездной величиной называется звездная величина, которую имела бы звезда, если бы находилась от солнечной системы на расстоянии 10 парсек). Через формулу $M = 2,5 \ln L + \text{const}$ мы получаем связь между светимостью и спектром. Равенство $L_b = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$ связывает светимости, радиусы и эффективные температуры звезд.

Рассмотрим “полосы” на диаграмме ГР. Наибольшее число звезд концентрируется в полосе, располагающейся “по главной диагонали” – от левого верхнего угла к правому нижнему по кривой, напоминающей кубическую параболу. Если принять гипотезу, согласно которой области концентрации звезд на диаграмме ГР соответствуют наиболее устойчивому состоянию, т. е. наиболее длительному времени существования звезды в этом виде, то в первую очередь следует моделировать именно это состояние объекта. Построенная модель должна объяснять и все остальные “полосы” на диаграмме: I – яркие сверхгиганты (с подраз-

делением на два подкласса: Ia и Ib), II – “неяркие” сверхгиганты, III – гиганты, IV – субгиганты, VI – субкарлики, VII – белые карлики (тоже с подразделением на два подкласса: VIIa – с внутренними ядерными источниками энергии и VIIb – без таковых). Римской цифрой V обозначается главная последовательность – карлики, наиболее устойчивая конфигурация звезды.

Нам предстоит последовательно рассмотреть 3 стадии эволюции звезды:

- 1) “рождение” звезды и достижение ей главной последовательности;
- 2) время нахождения на главной последовательности (наиболее длительная стадия эволюции);
- 3) конечная стадия эволюции.

1. Рождение и первоначальная эволюция звезды. Появление качественно нового объекта объясняется обычно с помощью одного из трех механизмов, либо суперпозицией двух из них:

- 1) синтез, слияние;
- 2) разложение, взрыв;
- 3) трансформация, метаморфизм –

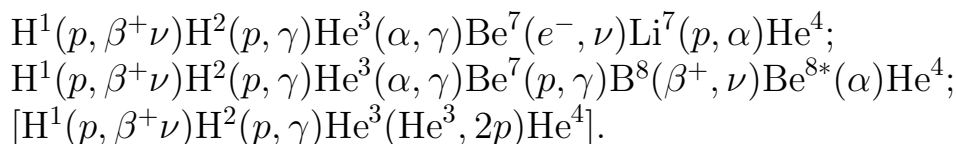
сравните, например, с классификацией химических реакций. В нашем случае, впрочем, третий механизм маловероятен: исходя из общепринятого мнения о продолжающемся рождении звезд во Вселенной, количество исходных, трансформирующихся объектов должно быть одного порядка с количеством наблюдаемых звезд. Тем не менее ни один подобный объект не зафиксирован в наблюдениях. В отношении первого и второго механизмов дискуссии продолжаются. Сторонники второго опираются на гипотезу о происхождении Вселенной из одного “протоатома” путем взрыва; этим же объясняется видимое расширение наблюдаемой вселенной. Естественно предположить, что после первоначального взрыва могли остаться какие-то фрагменты “дозвездного” вещества, из которого впоследствии продолжают образовываться звезды. Сторонники первого механизма справедливо указывают на то, что “дозвездное” вещество никто не наблюдал, и нет никаких свидетельств того, что оно “скрыто” от нашего наблюдения, например, темными туманностями или находится в недоступных для наблюдений областях (ядро Галактики и др.). Еще одним доводом в пользу первого механизма является различие в химическом составе “старых” и “молодых” звезд – старые звезды образовались из первоначальных облаков водорода, молодые – из газопылевых туманностей, включающих в себя, помимо водорода, остатки “бывших” звезд, обогащенные более тяжелыми элементами, возникшими в результате термоядерных реакций синтеза в результате эволюции

звезд предыдущих поколений. Мы будем исходить из первого механизма, как более универсального, хотя не исключено, что в качестве “дозвездного” вещества второго механизма могут фигурировать “черные дыры” и нейтронные звезды.

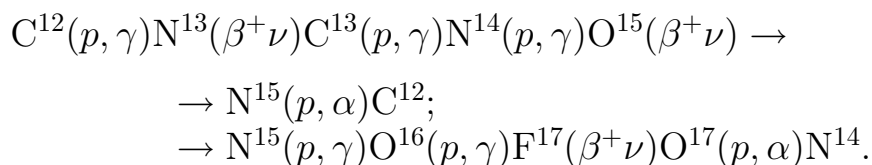
Исходным “материалом” для образования звезды является диффузное вещество, на которое действует собственная сила гравитации (и, возможно, гравитационные поля уже образовавшихся близких звезд). При отсутствии до определенного момента значимого газового давления облако газа и пыли сжимается, причем сжатие сопровождается разогревом вследствие перехода гравитационной энергии в тепло. Как только температура в центре облака становится достаточной для возникновения термоядерной реакции, появляется звезда. В момент возникновения звезда находится вблизи от главной последовательности, чуть правее ее (на так называемой начальной главной последовательности). Смещение звезды на диаграмме ГР в самом начале эволюции обусловлено переходом в устойчивую конфигурацию – при “возгорании” равновесие диффузного облака нарушается. Первоначальное положение звезды на главной последовательности так же, как и ее дальнейшая судьба, зависит от исходной массы – той массы диффузной туманности, которая попала в сферу притяжения “зародыша” звезды.

2. Звезды главной последовательности. Энергия, вырабатываемая звездой, возникает при термоядерной реакции превращения водорода в гелий. Обычно рассматривают две реакции – протон-протонная реакция и углеродно-азотный цикл. Следует заметить, что возможных реакций гораздо больше, чем две, но реализуются только те реакции, которые имеют наибольший энергетический эффект.

Протон-протонная реакция может идти по трем схемам (впрочем, третья маловероятна). Здесь используется общепринятое сокращенное обозначение – $H^1(p, \beta^+\nu)H^2$ означает $H^1 + p \longrightarrow H^2 + \beta^+ + \nu$.



Кроме протон-протонной реакции, при наличии более тяжелых ядер возможен и углеродно-азотный цикл



Заметим, что в углеродно-азотном цикле ядра углерода и азота не расходуются, т. е. являются чистыми катализаторами.

На стадии “выгорания” водорода звезда находится на главной последовательности. Будем считать, что звезда обладает сферической симметрией и находится в равновесии под действием силы притяжения и силы газового давления [14]. Пусть P – давление и ρ – плотность внутри звезды. Эти величины зависят от расстояния r от центра звезды. Уравнение равновесия под действием указанных сил (уравнение гидростатического равновесия) имеет вид

$$dP = -g\rho dr, \quad (25)$$

где g – ускорение силы тяжести в данном месте звезды, которое в случае сферической симметрии определяется формулой

$$g = \frac{\gamma M_r}{r^2}, \quad (26)$$

где γ – постоянная тяготения, и M_r – масса, заключенная внутри сферы радиуса r , т. е.

$$M_r = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (25) и учитывая (27), приходим к уравнению механического равновесия

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi\gamma\rho. \quad (28)$$

В это уравнение входит две неизвестные величины – давление P и плотность ρ . Для того, чтобы уравнение стало определенным, надо ввести некоторую зависимость между этими величинами, например, политропную: $P = C\rho^k$, где C и k – константы. Таким образом, одной из простейших моделей звезды является **политропный газовый шар**. Выполним подстановку $\rho^{k-1} = u$ и зададимся значением $u_0 = u|_{r=0}$ – значением u в центре звезды. Тогда, переходя к безразмерным переменным $u = u_0 y$, $x = \lambda r$, получим уравнение

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -y^n, \quad (29)$$

которое называется **уравнением Эмдена**, с начальными условиями $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$. Здесь константа λ подбирается так, чтобы в конечном уравнении исчезли все физические постоянные. В данном случае $C(1+n)\lambda^2 = 4\pi\gamma u_0^{n-1}$, $n = 1/(k-1)$. Величина n называется **политропным индексом**. При значениях $n = 0, 1, 5$ уравнение (29) разрешимо в квадратурах. Обобщением уравнения (29) является уравнение Эмдена-Фаулера

$$y'' = Ax^n y^m,$$

используемое в более сложных моделях звезд.

Теперь выведем уравнение энергетического равновесия, которое следует из того, что количество энергии, вырабатываемое в каком-либо элементарном объеме звезды, равно количеству энергии, которое из этого объема выходит. Пусть ε – количество энергии, вырабатываемое одним граммом звездного вещества, и L_r – количество энергии, вырабатываемое внутри сферы радиуса r . Тогда

$$L_r = 4\pi \int_0^r \varepsilon \rho r^2 dr. \quad (30)$$

Если обозначить через H_r поток энергии в радиальном направлении на расстоянии r от центра звезды, то $4\pi r^2 H_r = L_r$. Выражение для величины H_r определяется механизмом переноса энергии внутри звезды. Основным механизмом является излучение (мы будем учитывать только этот фактор), хотя в некоторых случаях необходимо принимать во внимание конвекцию и теплопроводность. Из уравнения переноса излучения находим

$$\frac{dP_R}{dr} = -\frac{\varkappa \rho}{c} H_r,$$

откуда, учитывая выражение для H_r и формулу (30), получаем

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\varkappa \rho} \frac{dP_R}{dr} \right) = -\frac{\varepsilon}{c} \rho. \quad (31)$$

Здесь P_R – давление излучения, \varkappa – коэффициент поглощения, рассчитанный на единицу массы, и c – скорость света. Далее мы будем понимать под P в уравнении механического равновесия сумму давлений – газового и лучистого: $P = P_G + P_R$, где

$$P_G = \frac{R_*}{\mu} \rho T, \quad P_R = \frac{1}{3} a T^4,$$

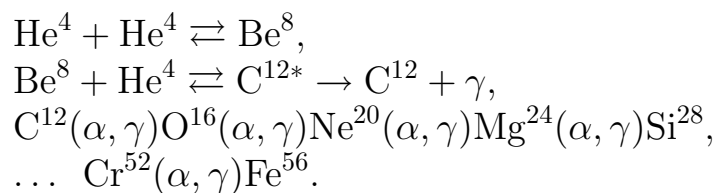
считая, что эти компоненты определяются через уравнение состояния газа и закон Стефана-Больцмана (здесь R_* – газовая постоянная, μ – средний молекулярный вес, рассчитываемый по формуле

$$\mu = \frac{4}{6X + Y + 2},$$

X – весовая доля водорода, Y – весовая доля гелия; предполагается, что химический состав звезды задан). Так выводятся основные уравнения теории внутреннего строения звезд (28) и (31). К этим уравнениям следует добавить граничные условия. В центре звезды мы имеем $M_r = 0$,

$L_r = 0$ при $r = 0$, на границе звезды – $\rho = 0$, $T = 0$ при $r = R$. Заметим, что оба основных уравнения основаны на фундаментальных законах – законах сохранения. Феноменологические законы используются на конечной стадии моделирования – для введения дополнительных связей между избыточным количеством искомым переменных. Заметим также, что использование уравнений **равновесия** для описания эволюции возможно лишь в случае, когда среднее время, за которое вырабатываемая энергия излучается звездой, мало по сравнению со временем, в течение которого заметно меняется мощность источников энергии.

Как только в центральных областях звезды водород будет исчерпан, равновесие звезды нарушается. Тем не менее внутренние области звезды по-прежнему горячее внешних, и перенос энергии наружу будет продолжаться. Но так как выделение ядерной энергии прекращается, энергия может черпаться только из тепловых запасов; любые потери тепловой энергии связаны с уменьшением давления звездного газа, что приводит к сжатию центральных областей под действием вышележащих слоев. Сжатие вызывает увеличение температуры, которое продолжается до тех пор, пока она не достигнет значения, при котором возможна следующая ядерная реакция – **выгорание гелия**. Этот процесс протекает следующим образом:



Для синтеза более тяжелых чем Fe^{56} ядер этот процесс непригоден, так как реакция становится эндотермичной. Поэтому образование ядер с массой бóльшей, чем у железа, происходит только при наличии источника свободных нейтронов.

3. Поздние стадии эволюции звезд. Итак, содержание водорода в центре звезды падает практически до нуля. Наступает первый критический момент в эволюции звезды – в центральных областях прекращается выделение энергии, и они вновь начинают (сначала медленно) сжиматься, выделяя гравитационную энергию. Область, в которой еще горит водород, постепенно перемещается из центра наружу, и образуется “слоевой” водородный источник энергии. Светимость центральной части звезды становится очень малой, и внутри звезды появляется почти изотермическое ядро, состоящее из гелия и малой примеси тяжелых элементов, соответствующей начальному химическому составу звезды. Постепенно медленное сжатие центральных областей переходит в быстрое сжатие. Переход возникает в тот момент, когда масса изотермического ядра до-

стигает критического значения – предела Шёнберга-Чандрасекара. При этом внутренние слои звезды быстро сжимаются и разогреваются, но радиус всей звезды при этом увеличивается. Это подтверждается решением модельных уравнений строения звезды с переменным химическим составом – звезда главной последовательности (V) превращается в красный гигант (III). Светимость при этом почти не меняется.

Проверка адекватности этой модели может быть проведена с помощью обработки наблюдательных данных. Большое значение имеют диаграммы ГР, построенные для звезд шаровых (“старое” население типа II) и рассеянных (“молодое” население типа I) звездных скоплений. Дело в том, что звезды любого скопления имеют, как правило, общее происхождение на протяжении небольшого интервала времени и практически одинаковый исходный химический состав. Поэтому можно считать, что различное положение звезд на диаграмме ГР обусловлено исключительно различием в начальной массе. И диаграммы ГР различных звездных скоплений обладают следующим общим свойством – до определенной светимости (начиная с самых слабых звезд) четко прослеживается главная последовательность, а для более ярких звезд положение звезды на диаграмме смещается вправо (рис. 8). Положение “точки поворота” к области ги-

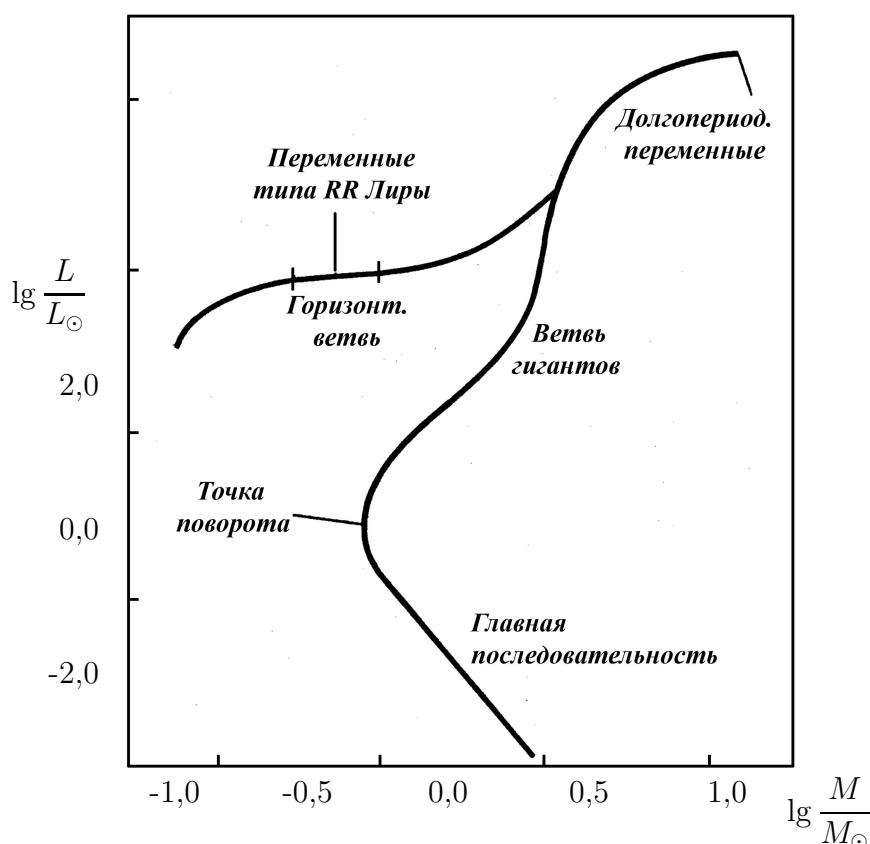


Рис. 8. Диаграмма ГР для шаровых скоплений

гантов зависит от возраста скопления, а отсутствие звезд главной последовательности выше точки поворота говорит о том, что чем ярче (и массивнее) звезда, тем быстрее она эволюционирует, т. е. тем меньше время ее жизни. Поэтому крайне несостоятельными выглядят попытки рассматривать поглощение звездой межзвездной материи (например, при прохождении через газовую или пылевую туманность), как фактор, продлевающий жизнь звезде.

Достижение предела Шёнберга-Чандрасекара сопровождается “возгоранием” гелия, результатом чего может стать вспышка новой или образование планетарной туманности. Может произойти также выброс части вещества звезды или полное перемешивание. Аналогично, согласно другим гипотезам, образование планетарных туманностей и даже взрывы сверхновых I типа является результатом взрывного начала “возгорания” углерода. Все эти процессы существенно осложняют моделирование эволюции. К настоящему моменту проведены многочисленные вычислительные эксперименты, моделирующие различные “ветви” эволюции, соответствующие наличию или отсутствию конвекции, выброса вещества, сброса оболочки, пульсациям за счет неустойчивости к флуктуациям и др. В частности, представляет интерес гипотеза, согласно которой взрыв сверхновой I типа вызывается спонтанным синтезом изотопа Cf^{254} – единственного богатого нейтронами изотопа, устойчивого к α - и β -распаду. Период времени уменьшения светимости сверхновой в 2 раза – ~ 55 дней – удивительно коррелирует с периодом полураспада указанного изотопа – $56,2 \pm 0,7$ дней.

Во всяком случае ясно, что звезды малой массы эволюционируют, в основном, согласно приведенным выше рассуждениям. Считается, что если масса звезды $M < 1,44M_{\odot}$ (M_{\odot} – масса Солнца), то конечным результатом эволюции будет **белый карлик** – звезда, состоящая из вырожденного газа. При $1,44M_{\odot} < M < 2M_{\odot}$ гравитационное сжатие приводит к еще большему уплотнению вещества звезды – образуется **нейтронная звезда**. Если же звезда имеет массу больше двух солнечных, стадия нейтронной звезды оказывается неустойчивой по отношению к дальнейшему гравитационному сжатию, и, как только радиус звезды становится равен радиусу сферы Шварцшильда, она коллапсирует и превращается в “**черную дыру**”.

Звезды большой массы ($M > 6M_{\odot}$), как правило, “не доживают” до стадии гравитационного коллапса – как только вещество центральных областей превращается в элементы группы железа, ядерные реакции прекращаются, но температура в центре продолжает возрастать. Температура наружных слоев, в которых имеется ядерное топливо, сильно увеличивается, в результате чего происходит ядерный взрыв, разруша-

ющий звезду и приводящий к вспышке сверхновой (II типа). При этом синтезируются тяжелые элементы и возникают потоки космических лучей, а остаток звезды может стать пульсаром. Причиной вспышек новых звезд может быть быстрый обмен массой между компонентами тесных двойных систем.

2.4. Симметрия как фундаментальное свойство

Под **симметрией** мы понимаем свойство оставаться неизменным (т. е. инвариантным) под действием некоторых преобразований. Симметрия в той или иной форме присуща всем реальным объектам, поэтому симметричные свойства часто оказываются определяющими факторами как при построении модели, так и при проверке ее на адекватность. Более того, большинство фундаментальных законов сами по себе являются симметриями: например, любой закон сохранения, определяя некоторую **сохраняющуюся величину**, гарантирует ее неизменность, т. е. инвариантность, во всей области существования. В частности, таким свойством обладают **первые интегралы** дифференциальных уравнений.

Математически симметрия может быть определена как инвариант группы преобразований. В переносном смысле **симметрией** называют саму группу преобразований, и, если она непрерывна, то и соответствующий ей **инфинитезимальный оператор**, представляющий собой оператор бесконечно-малого преобразования, принадлежащего этой группе. Поэтому и область математического анализа, изучающая симметрии различных уравнений, называется **групповым анализом**. Заметим, что в классическом групповом анализе (введенным в математическую практику в конце XIX века Софусом Ли), рассматриваются не столько “чистые” инварианты, сколько уравнения, инвариантные на многообразии своих собственных решений – для модельных задач этого, как правило, достаточно (см., например, [15]).

Модельные уравнения, описывающие фундаментальные законы, как правило, обладают высокой симметрией (т.е. являются инвариантными относительно нескольких различных групп преобразований). Так, в подавляющее множество модельных уравнений не входят явно ни пространственные переменные, ни время. Причина проста: фундаментальный физический закон не зависит от выбора начала координат, он инвариантен относительно произвольных сдвигов любых независимых переменных. Косвенно это означает еще и **устойчивость** решения относительно различных флуктуаций – произвольная трансляция переводит решение снова в решение, т. е. физическая сущность “сдвинутого” решения сохраняется.

Проверка адекватности модели с точки зрения сохранения симметрии описываемого реального объекта может производиться двумя методами:

- а) поиском симметрий полученного модельного уравнения, и
- б) построением модельного уравнения, уже имеющего априорную симметрию реального объекта.

Первый метод предполагает решение **прямой задачи группового анализа** для построенного модельного уравнения – по заданному уравнению или классу уравнений ищется допустимый им **инфинитезимальный оператор** непрерывной симметрии, первый интеграл или дискретная группа эквивалентности. Дальнейшим развитием этого метода является поиск решений, инвариантных относительно найденной симметрии – такие **инвариантные решения**, как правило, имеют достаточно “прозрачный” физический смысл. Даже если это и не так, полученные в замкнутой форме аналитические решения могут служить нулевыми приближениями или тестами для эффективной реализации численных алгоритмов.

Для применения второго метода необходимо решение **обратной задачи группового анализа** – ищется класс уравнений, имеющий априорно заданную симметрию. При таком подходе любая построенная модель заведомо будет иметь требуемую симметрию, и задача моделирования сводится к проблеме выбора искомой модели из широкого класса уравнений. Решение обратной задачи применяется также для описания возможно более широких классов уравнений, интегрируемых в замкнутой форме, т.е. для поиска потенциальных классов удобных модельных уравнений.

Важными частными случаями инвариантных решений являются **автомодельные решения** – решения, допускающие (неравномерное) растяжение по всем зависимым и независимым переменным, входящим в модельное уравнение. Их востребованность в моделировании возникает как следствие того, что практически все физически значимые измеряемые величины имеют **размерность** [16]. Например, в системе CGS **размерность всех физических величин имеет вид степенного одночлена (монома) $L^l M^m T^t$** . Покажем, что такой вид формулы размерности определяется следующим физическим условием: отношение двух численных значений какой-нибудь производной величины не должно зависеть от выбора масштабов для основных единиц измерения. Для основных величин это условие является составной частью определения единицы измерения и удовлетворяется само собой.

Пусть y – некоторая размерная производная величина; для простоты примем сначала, что она является геометрической и поэтому за-

висит только от длин, т.е. $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Обозначим символом y' значение величины y , соответствующее значениям аргументов x'_1, x'_2, \dots, x'_n . Числовое значение y , а также y' , зависит от единицы измерения для расстояний x_1, x_2, \dots, x_n . Уменьшим эту единицу или масштаб расстояний в α раз. Тогда согласно сформулированному выше условию мы должны иметь

$$\frac{y'}{y} = \frac{f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{f(x'_1\alpha, x'_2\alpha, \dots, x'_n\alpha)}{f(x_1\alpha, x_2\alpha, \dots, x_n\alpha)},$$

т.е. отношение y'/y должно быть одинаковым при любом значении масштаба длин α . Отсюда получаем

$$\frac{f(x_1\alpha, x_2\alpha, \dots, x_n\alpha)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{f(x'_1\alpha, x'_2\alpha, \dots, x'_n\alpha)}{f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}$$

или

$$\frac{y(\alpha)}{y(1)} = \frac{y'(\alpha)}{y'(1)} = \varphi(\alpha).$$

Следовательно, отношение числовых значений производных геометрической величины, измеренной в различных масштабах длины, зависит только от отношения масштабов длин. Вид функции $\varphi(\alpha)$ легко найдется – из

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(1)} = \varphi(\alpha_1), \quad \frac{y(\alpha_2)}{y(1)} = \varphi(\alpha_2),$$

откуда

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right), \quad (32)$$

так как при $x'_1 = x_1\alpha_2$, $x'_2 = x_2\alpha_2$, \dots , $x'_n = x_n\alpha_2$ имеем

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(\alpha_2)} = \frac{y'_1\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{y'_1(1)} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right).$$

Дифференцируя уравнение (32) по α_1 и полагая $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, получаем

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=1} = \frac{m}{\alpha}.$$

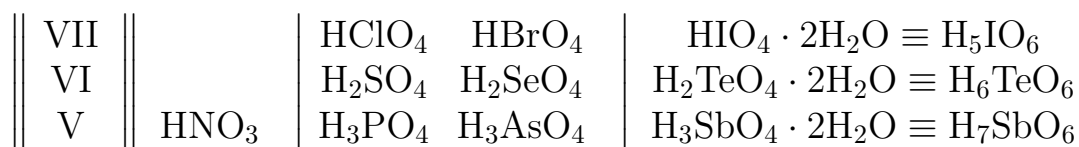
Интегрируя, находим $\varphi = C\alpha^m$. Так как при $\alpha = 1$ имеем $\varphi = 1$, то $C = 1$, т.е. $\varphi = \alpha^m$. Этот вывод справедлив для любой размерной величины, зависящей от нескольких основных величин, если мы будем менять только один масштаб. Нетрудно видеть, что в случае изменения масштабов α, β, γ трех основных величин, то функция φ будет иметь

вид $\varphi = \alpha^m \beta^n \gamma^t$. По существу, это и означает, что решение модельного уравнения должно допускать (неравномерное) растяжение.

Фундаментальную роль симметрии подтверждает и сравнение строения химических соединений и, например, кристаллов. Известны химические соединения с самой разнообразной симметрией, тогда как кристаллографические группы симметрии имеют образующие только порядка 2, 3, 4, 6. Происходит это потому, что **любая неорганическая кристаллическая решетка должна допускать группу линейных трансляций (дискретных переносов)**, а из геометрии известно, что правильные мозаики покрывают плоскость (без щелей и наложений) только в случае, если состоят из элементов, имеющих дискретные группы вращения указанного порядка. Сейчас, впрочем, известны мозаики на основе правильного пятиугольника (мозаики Пенроуза) [17], однако они допускают спиральную, а не линейную трансляцию, что характерно не для кристаллов, а для структур живых организмов (строение соцветий, морских звезд, раковин моллюсков и т.п.). Аналогично, формы реальных кристаллов могут совпадать только с первыми тремя платоновыми телами – тетраэдром, кубом и октаэдром, а также с их комбинациями. В литературе часто встречается утверждение, что многие драгоценные камни (например, гранаты) встречаются в природе в виде кристаллов-додекаэдров, однако имеется в виду не платоновое тело – пентагональный додекаэдр, а ромбический додекаэдр, вообще не являющийся правильным многогранником (он дуален полуправильному полиэдру – кубооктаэдру). Что же касается икосаэдра, то эта форма широко распространена на границе “живого” и “мертвого” – ее имеют капсомеры многих известных вирусов, некоторые из них образуют даже “кристаллы”. Высказывалась оригинальная гипотеза, что симметрии порядка 5, 7 и более высоких порядков появились в живой природе как средство выживания – организмы, обладавшие более простой симметрией, погибли, закристаллизовавшись в пересыщенном соляном растворе, каким был, по предположению, “первобытный океан”.

Вернемся к строению химических веществ. Хорошо известно, что состав химической молекулы (стехиометрия) зависит не только от валентности, но и от **координационного числа** центрального атома. И если валентность определяется способностью атома отдавать и присоединять электроны и является функцией номера элемента в периодической системе, близкой к периодической, то координационное число – функция, близкая к монотонной, и определяется геометрическими параметрами центрального иона. Грубо говоря, координационное число – количество ионов, которые могут разместиться в координационной сфере вокруг центрального иона.

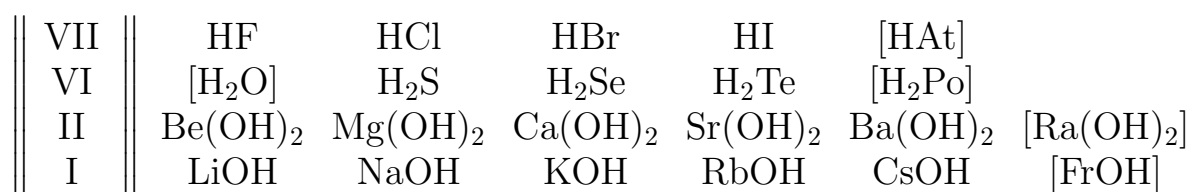
Рассмотрим ряд кислот, образованных элементами главных подгрупп 7-й, 6-й и 5-й групп в высшей степени окисления:



Вертикальными черточками разделены соединения, в которых координационные числа центральных атомов равны, соответственно, 3, 4 и 6. Первый (неполный) столбец включает только азотную кислоту, которая является весьма сильной. Следуя шаблонной аналогии, можно было бы ожидать, что основная форма фосфорной кислоты имеет такой же стехиометрический состав, т. е. HPO₃, но это не так! Ортофосфорная кислота трехосновна (второй столбец третьей строки) и представляет собой кислоту средней силы. Соединения, формально соответствующие по составу азотной кислоте (“метафосфорная кислота”) известны, но представляют собой полимеры [HPO₃]_n и имеют цепное или циклическое строение. Такое различие в структуре (и свойствах!) определяется координационным числом, которое у азота равно трем (плоский равносторонний ион NO₃⁻), а у фосфора (и у мышьяка) – четырем (тетраэдрический ион PO₄⁻³). Соответствующее соединение сурьмы существует лишь в виде “кристаллогидрата” с двумя молекулами воды, т. е. в форме **семиосновной** очень слабой кислоты H₇SbO₆ (октаэдрический ион SbO₆⁻⁷). В литературе отмечается, что “в действительности не зафиксировано ни одного случая структурной аналогии между соответствующими производными фосфора и сурьмы” [18].

Первая и вторая строки сохраняют эту тенденцию с той лишь разницей, что аналога азотной кислоте в них нет (кислород и фтор не образуют кислородсодержащих кислот и не могут находиться в высшей, соответствующей номеру группы, степени окисления). Кроме этого, кислоты с координационным числом центрального атома, равным четырем, являются сильными (серная сравнима с азотной, хлорная же вообще считается одной из самых сильных кислот).

Влияние координационного числа, в свою очередь зависящего от радиуса центрального иона, особенно заметно в сравнении с закономерным увеличением силы галогеноводородных и халькогеноводородных кислот и оснований щелочных и щелочноземельных металлов:



(в квадратных скобках – вода, не имеющая выраженного кислотного или щелочного характера, и крайне нестабильные производные радиоактивных элементов).

В заключение этого параграфа приведем несколько примеров строения молекул соединений с несколько необычным координационным числом (5, 7, 9) [18]. Как указывалось выше, оси симметрии таких порядков не встречаются в кристаллах, но на отдельные молекулы этот закон не распространяется. Тем не менее структура любого химического соединения подчиняется определенным правилам. Эти правила диктуются равноправием (или неравноправием) ионов в координационной сфере, а также наличием (или отсутствием) строгой (или нестрогой) центральной симметрии. Для любого выпуклого многогранника справедлива формула Эйлера

$$N_0 + N_2 = N_1 + 2,$$

где N_0 – число вершин, N_1 – число ребер и N_2 – число граней. Из этой формулы следуют уравнения, относящиеся к частным типам полиэдров. Если в каждой вершине сходятся 3 ребра (полиэдр со связанностью 3) и f_n – число граней с n ребрами (или вершинами), то

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 \pm 0f_6 - f_7 - 2f_8 - \dots = 12.$$

Аналогично, для полиэдров со связанностью вершин 4 и 5 уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} 2f_3 \pm 0f_4 - 2f_5 - 4f_6 - \dots &= 16, \\ f_3 - 2f_4 - 5f_5 - 8f_6 - \dots &= 20. \end{aligned}$$

Если потребовать, чтобы все грани полиэдров были одного типа, то мы получаем все правильные многогранники (платоновы тела). Далее, если построить уравнение для полиэдра с 6-связанными вершинами, то коэффициент при f_3 оказывается равным нулю, а все остальные коэффициенты отрицательны. Следовательно, не существует выпуклого многогранника, в котором **в каждой** вершине сходятся 6 ребер. По этой же причине невозможны и полиэдры, в каждой вершине которых сходится более шести ребер.

Таким образом, существуют довольно жесткие ограничения на структуры химических веществ, что и позволяет моделировать строение соединений, исходя из принципов топологии и дополнительной информации о химических свойствах. Например, если потребовать, чтобы все ионы координационной сферы были равноправны, то для 5-координационных соединений возможна лишь тривиальная плоская конфигурация в виде правильного пятиугольника. Если требование равноправия немного ослабить, то наиболее симметричной оказывается конфигурация тригональной бипирамиды (пентахлорид сурьмы SbCl_5).

Аналогично, для 7-координационных соединений часто встречается конфигурация пентагональной бипирамиды (K_3UF_7 , K_3ZrF_7), а 9-координационный ион ReH_9^{-2} , проблемы идентификации которого изложены выше (см. п. 1.6), имеет структуру “трехшапочной тригональной призмы” (рис. 9). В этом полиэдре к шести вершинам тригональ-

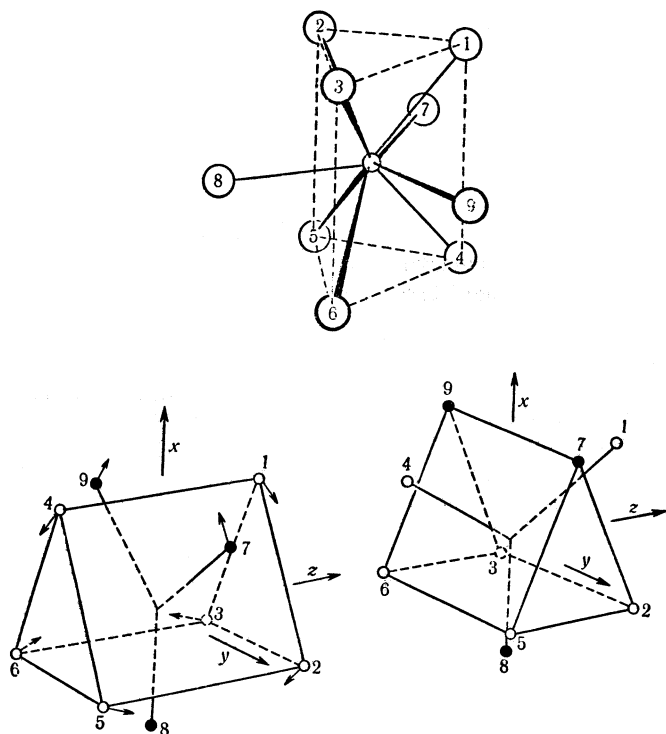


Рис. 9

ной призмы добавляются три “шапки” – три вершины четырехгранных пирамид, построенных на боковых гранях призмы. При этом дополнительные три атома водорода не эквивалентны остальным шести. Тем не менее такой комплекс может довольно легко и обратимо изменять конфигурацию за счет небольших деформационных перемещений атомов H, как показано на рис. 9 (внизу). В результате этого все 9 протонов становятся эквивалентными с точки зрения протонного резонанса, что и подтверждается ЯМР-спектром [8].

В заключение приведем еще одну любопытную иллюстрацию принципа единства и множественности моделей. На рис. 10 показана структура синтетического цеолита RHO – трехмерная кубическая решетка с усеченными кубооктаэдрами в узлах. В точности такое же строение имеет граф дискретной группы преобразований $(\mathcal{C}_2 \times \mathcal{S}_4) \times \mathcal{C}_\infty^3$ [19] по параметрам α, β, γ гипергеометрического уравнения Гаусса

$$x(x-1)y'' + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0.$$

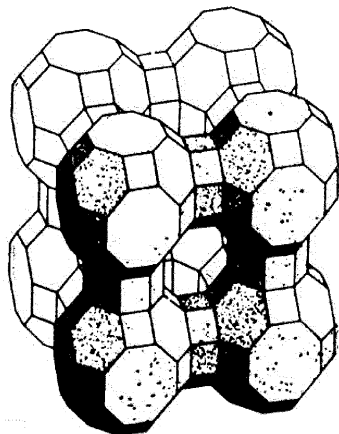


Рис. 10

2.5. Экологическая модель: “хищник – жертва”

Рассмотрим некоторый вид животных, живущих изолированно в неизменной среде, или сосуществующих с другими видами без прямого или косвенного влияния. Предположим, что указанная среда содержит достаточно корма. Если пренебречь периодичностью рождаемости и смертности, то для короткого интервала времени заданной длины в достаточно многочисленной популяции число рождений и число смертей будут пропорциональны общей численности индивидуумов на данный момент. Прирост числа индивидуумов N в некотором интервале будет пропорционален числу N , а также длине интервала, пока интервал мал:

$$dN = \varepsilon N dt,$$

где ε – коэффициент прироста. Нетрудно видеть, что здесь мы путем осреднения перешли от дискретной модели к непрерывной, как более реализуемой, так как в итоге мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \quad (33)$$

с общим решением $N = N_0 e^{\varepsilon(t-t_0)}$, где N_0 – численность популяции в момент $t = 0$. Если $\varepsilon > 0$, популяция растет, при $\varepsilon < 0$ – вымирает, при $\varepsilon = 0$ вид постоянен (рождаемость компенсирует смертность). Если взаимодействующих видов несколько, надо рассматривать систему

$$\frac{1}{N_i} \frac{dN_i}{dt} = f(N_1, \dots, N_p), \quad i = 1, \dots, p.$$

Такой подход к изучению биологических сообществ был предложен в 1926 году итальянским математиком Вито Вольтерра [20].

Пусть видов два, и они антагонистичны (т. е. один вид питается другим). Для определенности можно считать, что в ограниченной области природной среды сосуществует популяция мышей численностью N_1 и популяция кошек численностью N_2 . Если корма для мышей достаточно, $\varepsilon_1 > 0$, тогда как кошки питаются мышами, и только мышами – при отсутствии мышей кошки вымирают, т. е. $-\varepsilon_2 > 0$. Систему уравнений можно в простейшем виде записать как

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2), \\ \frac{dN_2}{dt} = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1), \end{cases} \quad (34)$$

где все входящие функции и параметры строго больше нуля. Более того, в начальный момент времени N_1 и N_2 должны быть больше некоторых критических значений, при которых вид вымирает безотносительно наличия корма. Легко показать, что стационарная точка системы (34) – центр (рис. 11), т. е. система “негрубая”, и малейшие флуктуации немедленно влекут необратимые изменения амплитуды колебаний.

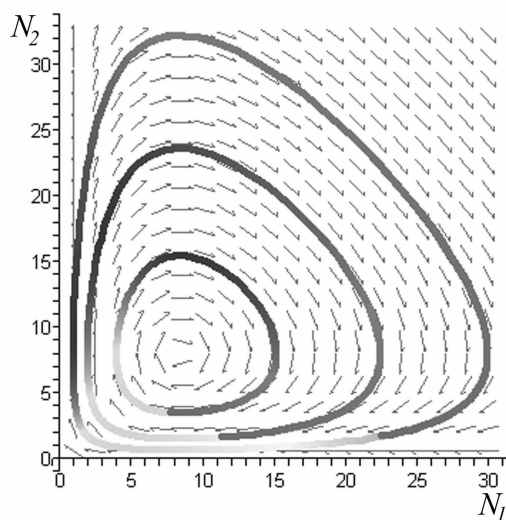


Рис. 11

Тем не менее стационарное состояние устойчиво по Ляпунову (но не асимптотически), так как при близких начальных условиях амплитуды колебаний малы (и скорости ограничены). Период малых колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}},$$

т. е. зависит только от “коэффициентов прироста”, но не зависит от

“коэффициентов прожорливости”. Из уравнений (34) следует, что

$$\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = K_1 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} N_1 dt, \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = K_2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} N_2 dt,$$

так что величины K_1 и K_2 являются **средними** значений N_1 и N_2 в течение периода T . Приближенное решение системы (34) для малых колебаний имеет вид

$$\begin{aligned} N_1 &= K_1 + \frac{\gamma_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} A \cos(\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} t + a), \\ N_2 &= K_2 + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\varepsilon_2}} A \sin(\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} t + a), \end{aligned} \tag{35}$$

где A и a – константы. Точка (N_1, N_2) на фазовой плоскости описывает эллипс с центром в стационарной точке

$$(K_1, K_2) = \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \right).$$

Достоинства указанной модели очевидны: система (34) интегрируется в замкнутом виде, модель очень наглядна и удовлетворительно описывает взаимодействие популяций. Более того, модель пригодна и для описания взаимодействия других антагонистичных объектов. Однако, как следует из (35), фазы малых колебаний всегда находятся в квадратуре, т. е. со сдвигом на $\pi/2$.

2.6. Экологическая модель: конкуренция за корм

Теперь предположим, что видов два, но они питаются одной и той же пищей, а друг друга не едят. Тогда возникает антагонизм другого типа, а именно, конкуренция. Каждый из видов в отсутствие взаимодействия будет развиваться по закону (33) – если пищи достаточно, рост популяции будет происходить по экспоненциальному закону, и численность каждого вида N_1, N_2 будет иметь постоянные положительные коэффициенты прироста $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

В реальной ситуации, когда эти виды живут на ограниченной территории, пища будет уменьшаться по мере возрастания чисел N_1 и N_2 . Пусть $F(N_1, N_2)$ – количество пищи, поедаемой в единицу времени. Эта функция должна обращаться в нуль одновременно с суммой $N_1 + N_2$ и монотонно стремиться к ∞ вместе с каждой из этих переменных. Систему уравнений, описывающих динамику обеих популяций, можно

записать в виде [20]

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = [\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)]N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = [\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)]N_2, \end{cases} \quad (36)$$

где γ_1, γ_2 – положительные постоянные, соответствующие потребности в пище для каждого из видов. Рассмотрим эволюцию взаимодействия популяций, исходя из начальных данных $N_1(t_0) = N_{10}, N_2(t_0) = N_{20}$. Можно доказать, что для всякого конечного интервала (t_0, T) существует единственное решение из двух непрерывных функций, значения которых заключены между двумя положительными числами, бóльшее из которых не зависит от конца интервала T . Это, в частности, означает, что N_1 и N_2 остаются ограниченными.

Систему (36) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{d(\ln N_1)}{dt} = [\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)], \\ \frac{d(\ln N_2)}{dt} = [\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)], \end{cases}$$

откуда получаем

$$\gamma_2 \frac{d(\ln N_1)}{dt} - \gamma_1 \frac{d(\ln N_2)}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1.$$

Интегрируя это выражение и подставляя начальные значения, получим

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = \frac{N_{10}^{\gamma_2}}{N_{20}^{\gamma_1}} e^{(\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1)(t-t_0)}. \quad (37)$$

Если пренебречь практически невероятным случаем, когда

$$\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1 = 0,$$

и принять (без ограничения общности), что $\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1 > 0$. Тогда

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2},$$

и, согласно (37) имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = +\infty.$$

Так как N_1 ограничено, то следовательно, N_2 стремится к нулю.

Таким образом, второй вид, у которого величина ε/γ имеет меньшее значение, начинает вымирать и со временем исчезает, тогда как первый

вид продолжает существовать, и число его индивидуумов стремится к некоторому конечному ненулевому пределу при $t \rightarrow \infty$. Естественно, вымирает вид, более чувствительный к нехватке пищи.

В природе наблюдаются взаимодействия описанного типа. Как правило, результатом является один из следующих возможных:

1. Более слабый вид приспосабливается к другой пище или к другой среде обитания.
2. Более слабый вид вытесняется и мигрирует на другую территорию.
3. Более слабый вид вымирает и исчезает.

Первый исход наблюдается в хорошо известном случае конкуренции черной и серой крысы. Серая крыса сильнее и значительно умнее черной, к тому же организация и иерархия сообществ серых крыс существенно выше, чем у сообществ черных. В результате черная крыса встречается на тех же территориях, что и серая, но в местах, в которых комфортность проживания для серых крыс (с их точки зрения!) оказывается недостаточной.

Второй исход характерен, например, для конкуренции европейской и американской норки. Американская норка была завезена в Европу как перспективный пушной зверь (быстрое размножение и более прочный мех). Европейская норка стала повсеместно вытесняться как более слабая и малочисленная – все дальше и дальше на восток. В настоящий момент возникла настоятельная необходимость создания резервации для европейской норки на изолированной территории (например, на Командорских островах). Мелкие ареалы распространения европейской норки, в которых американская норка почему-то “не прижилась”, к сожалению, не могут обеспечить гарантии сохранения вида.

Третий исход (вымирание целых видов) человечество наблюдает уже в течение нескольких веков, как следствие непродуманного переселения видов на другие материки или спонтанной миграции видов, чему явно способствовала техногенная деятельность человека (например, развитие морского транспорта привело к расселению крыс практически по всему земному шару). При этом наибольшие потери несут эндемики – виды, распространенные лишь на ограниченной территории и нигде больше не встречающиеся. Большинство из них не могут приспособиться к существованию и размножению в иной среде обитания.

2.7. Альтернативные системы жизни

В этом разделе мы рассмотрим теоретические возможности существования жизни на неуглеродной основе. Оговоримся сразу – все нижеприведенные рассуждения никоим образом не являются **доказательством**

существования таких форм жизни. Речь идет исключительно о **возможности** возникновения структур, которые в результате эволюции могут приобрести черты (пусть простейших) живых существ.

Примем следующие ограничивающие предположения.

1. Мы будем рассматривать только “земноподобную” жизнь, т. е. предполагается, что любое живое существо имеет оболочку, внутри которой происходят жизненные процессы. Для существования живого существа необходима газообразная среда обитания, содержащая необходимое количество вещества для дыхания (“воздух”), а также жидкая субстанция для протекания обменных процессов – “растворитель”. При этом не исключается и жидкая среда обитания (состав которой в основном совпадает с растворителем, содержащим воздух). Иными словами, мы рассматриваем возможную модель “обычной” жизни, исключая “кристаллическую” жизнь и жизнь на основе “информационного поля”.
2. Для построения модели необходимо как минимум указать три основные составляющие: жизнеобразующий элемент, состав воздуха и состав растворителя, при этом они должны быть вполне совместимы в рамках единой среды обитания.
3. Температурный диапазон существования жизни может быть существенно шире, чем на Земле. Он не должен лишь противоречить аксиомам п. 1, 2.

Напомним основные составляющие форм жизни, возникших на Земле. Жизнеобразующим элементом является углерод (С), атомы которого обладают уникальной особенностью образовывать сколь угодно длинные цепочки и включать в них (помимо водорода, кислорода и азота) практически любые другие атомы (тем самым порождая огромное разнообразие органических и элементоорганических соединений). По причине высокой реакционной способности дыхательного агента – кислорода (O_2) – в воздухе содержится лишь 20,95 % кислорода (по объему). Остальной объем занимает азот (N_2 , 78,09 %), аргон (Ar, 0,93 %), углекислый газ (CO_2 , 0,03 %) и мѐньшие количества других газов. Все составляющие атмосферы (кроме инертных газов) в той или иной степени оказывают влияние на биосферу Земли.

Какие еще элементы периодической системы могут претендовать на роль жизнеобразующих? Совершенно очевидно, что начиная с четвертого периода периодической системы, составляющие ее элементы обнаруживают возрастающую тенденцию к образованию солеобразных ионных соединений и смешанных окислов, не говоря уже о разнообразных комплексах. Одновременно резко уменьшается способность образования

цепочек (в силу п. 1 мы не рассматриваем ионы, имеющие строение кластеров и содержащие связи “металл – металл”: такие вещества имеют, как правило, кристаллическую структуру и могут служить основанием лишь для “кристаллической” жизни). Поэтому возможные “кандидаты” на роль жизнеобразующих элементов сосредоточены в верхней части периодической системы. Естественно предположить также, что элементы главной подгруппы первой и второй групп не могут служить жизнеобразующими элементами, так как в силу своего выраженного металлического характера они образуют многочисленные ионные соединения, но не склонны к образованию ковалентных и водородных связей, служащих основой для органических и им подобных соединений.

Далее, элементы седьмой группы (галогены) проявляют слишком высокое сродство к электрону, для них очень характерно отрицательно-одновалентное состояние, в котором образование цепочек становится практически невозможным. Элементы шестой группы (халькогены) более склонны к образованию цепочек, в частности, сера. Однако жидкие сульфаны H_2S_n , $n \geq 2$ термодинамически неустойчивы и распадаются до газообразного сероводорода и твердой серы. Их производные – полисульфиды – более устойчивы, но сравнительно короткие цепочки атомов серы не обеспечивают достаточного количества и разнообразия соединений.

Таким образом, остается рассмотреть представителей третьей, четвертой и пятой групп. Ниже приведены фрагменты второго и третьего периодов таблицы элементов Менделеева (элементы первой и второй групп опущены, однако оставлены элементы шестой и седьмой, которые могут служить основой для воздуха и растворителя):

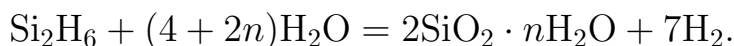
III	IV	V	VI	VII
B ⁵ 10,811	C ⁶ 12,01115	N ⁷ 14,0067	O ⁸ 15,9994	F ⁹ 18,9984
Al ¹³ 26,9815	Si ¹⁴ 28,086	P ¹⁵ 30,9738	S ¹⁶ 32,064	Cl ¹⁷ 35,453

Во-первых, исключим алюминий и фосфор – первый из-за явно металлического характера, второй – слишком слабой способности к образованию цепей (известны цепи или циклы, содержащие лишь до пяти атомов фосфора) [8]. Оставшиеся элементы (они на фрагменте таблицы выделены жирным шрифтом) обсудим более подробно, и начнем, естественно, с аналога углерода – кремния.

1. Кремний (Si). В [8] указывается, что склонность к образованию цепей для элементов четвертой группы уменьшается в ряду



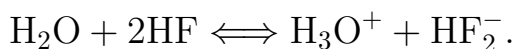
и если алканы C_nH_{2n+2} существуют без ограничения числа n , то гидриды кремния (силаны) охарактеризованы лишь до шестого члена ряда Si_6H_{14} , а высшие силаны получаются только в смеси и в небольших количествах. Все силаны очень реакционноспособны, самопроизвольно воспламеняются на воздухе, но устойчивы в нейтральной и кислой средах. Вместе с тем в присутствии оснований (даже их следов) силаны легко гидролизуются по схеме, обычной для соединений, содержащих гидридный водород (электроотрицательность водорода выше, чем кремния; аналогично гидролизуются бораны, см. далее):



Казалось бы, каким же образом кремний может быть жизнеобразующим элементом? Заметим тем не менее, что наиболее агрессивной средой для неминеральных соединений кремния оказывается вода и воздух – обычная среда обитания для нашей, углеродной жизни. А при окислении или гидролизе образуется кремнезем SiO_2 – наиболее обычный минерал Земли...

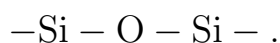
В этом смысле кремний и его соединения – антиподы углерода и органических соединений, и при моделировании данной ситуации в какой-то мере применима логика “от противного”. Наиболее агрессивными веществами для нашей земной жизни являются параллели к кислороду (веществу для дыхания) и воде (жидкая субстанция) – соответственно, фтор (F_2) и фтористый водород (плавиковая кислота HF). Как известно, фтор – еще более сильный окислитель, чем кислород, а фтористый водород (по своим физико-химическим свойствам) является близким аналогом воды: температура плавления HF составляет $-83,1^\circ C$, теплота плавления составляет $0,9$ ккал/моль, что близко к значению для льда; температура кипения составляет $+19,4^\circ C$. Таким образом, температурный диапазон существования жидкой фазы ($102,5^\circ C$) практически совпадает с таковым для воды, хотя кремниевая жизнь должна быть “холоднокровнее” земной (что, впрочем, хотя бы частично искупается бóльшей энергетикой фтора по отношению к кислороду). Аналогично воде молекула фтористого водорода весьма полярна ($\mu = 1,91$, у воды $\mu = 1,85$), обладая при этом резко выраженной склонностью к ассоциации путем образования водородных связей по схеме $\dots H - F \dots H - F \dots$. Плотность ($0,99$ г/см³) и диэлектрическая проницаемость ($83,6$ при $0^\circ C$) жидкого фтористого водорода очень близки к значениям этих параметров для

воды. В жидком HF хорошо растворимы многие соли одновалентных металлов и аммония, хуже – соли щелочноземельных элементов. Эти растворы проводят электрический ток, что обусловлено диссоциацией, например



Таким образом, близкая аналогия жидкого фтористого водорода и воды очевидна [7]. Заметим, что в жидком HF электролитами становятся и многие органические вещества, такие как этанол, бензол, глюкоза.

Что же касается многообразия химических соединений, то следует вспомнить, что кремний способен образовывать цепочки очень большой длины, если в качестве основного звена рассматривать “мостик”, содержащий кислород



В частности, известны многочисленные линейные, циклические и “поперечношитые” полимеры – **силоксаны**. В том, что в “кремниевой органике” содержатся атомы других элементов (углерода и кислорода) нет ничего удивительного – основой углеродной жизни являются соединения, содержащие азот (аминокислоты, белки и др.), а в ряде других жизненно важных соединениях имеются и другие гетероатомы (железо, кобальт, фосфор, сера). Иными словами, жизнь на основе одного только углерода (с водородом и кислородом) невозможна. Однако отметим, что все-таки весьма фантастично выглядит “первобытный океан” из жидкого фтористого водорода в атмосфере, содержащей изрядный процент свободного фтора, хотя именно в такой среде можно моделировать (или искать?) “кремниевую жизнь”.

2. Бор (B) и азот (N). Мы будем рассматривать бор и азот вместе, так как в отдельности эти элементы вряд ли могут быть жизнеобразующими; в наших логических построениях мы будем исходить из следующих фактов:

1. Бор проявляет необычайно высокую склонность к образованию водородных мостиков – многоцентровых связей, что приводит к аномальному стехиометрическому составу водородных соединений (боранов). Они по составу являются полными аналогами водородных соединений **четырёхвалентного** углерода. Вообще по свойствам бор больше похож на кремний, чем на алюминий или другие элементы той же группы.
2. Азот образует чрезвычайно широкий круг соединений, большинство из которых следует рассматривать скорее как органические, чем неорганические вещества. По электроотрицательности его пре-

восходят только кислород и фтор, к тому же, в отличие от своих аналогов, азот легко образует кратные связи.

3. Аммиак NH_3 – третья аномальная жидкость (наряду с H_2O и HF). Температуры плавления $-77,8^\circ\text{C}$ и кипения $-33,35^\circ\text{C}$ аммиака, аналогично воде и фтористому водороду, являются аномально высокими по сравнению со значениями, ожидаемыми при экстраполяции этих параметров для ковалентных водородных соединений более тяжелых элементов соответствующих групп. Эта аномалия объясняется образованием сильной водородной связи. Конечно, интервал жидкого состояния аммиака весьма низкотемпературный и довольно узкий, однако по физическим свойствам аммиак похож на воду; сильная ассоциация происходит вследствие полярной природы молекул и сильной водородной связи. Диэлектрическая проницаемость достаточно высока (~ 22 при -34°C), поэтому аммиак является удовлетворительным ионизирующим растворителем.
4. Бор и азот в равных количествах изоэлектронны удвоенному количеству углерода. Поэтому бор и азот образуют большой ряд соединений (боразонов), совершенно аналогичных органическим молекулам (с той лишь разницей, что они более реакционноспособны в силу наличия в них двух разных элементов).

Основное сходство бора с кремнием и отличие от алюминия состоит в том, что борная кислота, хоть и слабая, не обладает амфотерными свойствами, как $\text{Al}(\text{OH})_3$, являющаяся к тому же преимущественно основанием; гидриды бора (как и кремния) летучи, самопроизвольно воспламеняются и легко гидролизуются, они вообще уникальны вследствие электронодефицитной природы; легкий гидролиз галогенных соединений бора (кроме BF_3) приводит к образованию борной кислоты (точно так же как галогениды кремния гидролизуются до кремниевой кислоты).

Очень интересны соединения бора, содержащие углерод (карбораны) и, особенно, азот. Многие из них изоэлектронны и изоструктурны углеродным соединениям. В качестве примера чаще всего приводится **боразин** (или **боразол**) – $\text{B}_3\text{N}_3\text{H}_6$. Он не только чрезвычайно похож на бензол C_6H_6 по строению молекул, но и обладает аналогичными физическими и химическими свойствами. Различие состоит только в том, что в бензоле связи между атомами углерода неполярны, и ароматическое ядро не склонно к реакциям присоединения, в то время как ядро боразола вследствие своей полярности довольно реакционноспособно.

Таким образом, имеется теоретическая возможность существования жизни на основе “бор – азот”. В качестве жидкой субстанции может служить жидкий аммиак. Не совсем понятно, что играет роль “воздуха” – диборан (B_2H_6 , температура плавления $-165,6^\circ\text{C}$, кипения $-92,5^\circ\text{C}$)?

В заключение отметим, что если фторные атмосферы не известны в окрестностях Солнечной системы, то аммиак является достаточно обычным веществом – он присутствует в атмосферах Юпитера (аммиачные облака) и Сатурна. Мощная атмосфера, состоящая преимущественно из азота, имеется и у спутника Сатурна – Титана.

2.8. Золотое сечение и ряд Фибоначчи

Этот раздел, как и первый параграф следующей главы, является переходным от областей науки, традиционно считающимися точными, к гуманитарным. Мы рассмотрим феномен золотого сечения, в котором многие философы, ученые, архитекторы, музыканты видят одно из наиболее ярких проявлений гармонии природы.

Математическое определение золотого сечения – деление отрезка в среднепропорциональном отношении, когда целое так относится к большей своей части, как бóльшая часть – к меньшей

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}.$$

Эта задача имеет решение в виде корней квадратного уравнения

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

которые равны

$$x_1 = +\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618034\dots = \Phi,$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -0,618034\dots = -\Phi^{-1}.$$

При всей кажущейся простоте операции деления в крайнем и среднем отношении в ней скрыто множество интересных математических свойств и уникальная “способность” возникать в самых неожиданных областях человеческого знания и искусства. В математике наиболее известными соотношениями являются

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}_n$$

и

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n},$$

где U_k – числа Фибоначчи ($U_{k+2} = U_{k+1} + U_k$), а также тот факт, что каждый член ряда

$$\Phi^0, \Phi^1, \Phi^2, \Phi^3, \dots,$$

начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, т. е. обладает свойством чисел Фибоначчи.

Мы не будем рассматривать роль золотого сечения в архитектуре и живописи – об этом написаны сотни работ (см., например, [21]). Для нас наибольший интерес будет представлять **нарушенная симметрия** и ее проявления в менее известных сферах науки и искусства. Сейчас уже трудно установить, кто и когда впервые заметил, что точка кульминации многих выдающихся музыкальных произведений приходится приблизительно на точку золотого сечения. В этом, казалось бы, нет ничего удивительного – например, в сонатной форме известная асимметрия формы (различие экспозиции и репризы, а также естественная логика развития среднего раздела – разработки) исключает локализацию кульминации в середине произведения. Однако указанное правило сохраняется и в случае многочастных сложных произведений. Так, в “Страстях по Матфею” (Matthäuspasion) И. С. Баха (BWV 244), состоящих из 78 номеров (!), кульминация (альтовая ария “Erbarme dich, mein Gott” – №47) также находится вблизи точки золотого сечения. Поэтому представляется крайне маловероятным как случайное совпадение, так и осмысленный “подгон” автором кульминации под заранее выбранную точку.

Композитор и теоретик симметрии М. А. Марутаев обратил внимание на то, что совпадение кульминации с точкой золотого сечения никогда не бывает точным; кульминация отклоняется от золотого сечения (в ту или в другую сторону) на некоторую фиксированную величину (“невязку”). Этот факт послужил отправной точкой к определению понятия “нарушенная симметрия”. Это понятие развивается далее, и формулируются **законы гармонии** [21]. Рассматриваются следующие числовые ряды:

1. “Ряд А” – чистый строй

$$1, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{16}{9}, \frac{15}{8}, 2,$$

из которых исключается “повторение качеств” – числа 2 и 10/7 – октавное удвоение и второй тритон (7/5 и 10/7 с музыкальной точки зрения есть два оттенка одного и того же качества, а в темперированном строе вообще уменьшенная квинта совпадает с увеличенной квартой – 5ум ≡ 4ув).

2. Ряды Фибоначчи – f

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \dots$$

(отношения членов ряда Фибоначчи) и f'

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{21}{55}, \frac{34}{89}, \dots$$

(отношения членов ряда Фибоначчи, взятых через один).

3. Целые степени числа $\alpha = 0,9689845$.

Согласно М. А. Марутаеву, найденные им закономерности связывают фундаментальные величины – золотое сечение, постоянную тонкой структуры $1/137$, постоянную $\hbar c/e^2$, числа π и e . В свою очередь, эти связи дают нам объяснения фундаментальных закономерностей из различных научных и художественных областей:

1. Сложность ритмов периодической системы химических элементов Д. И. Менделеева.
2. Закон планетных расстояний (некоторый аналог эмпирического закона Тициуса-Боде).
3. Неточности биологической симметрии (расположение внутренних органов млекопитающих, расположение листьев на деревьях и многое другое).
4. Соотношения рождаемости мальчиков и девочек.
5. Закон построения музыкальной шкалы.
6. Соотношения размеров экспозиции, разработки и репризы сонатной формы, а также закономерности формообразования других музыкальных форм.

Подмеченные закономерности представляют несомненный интерес, хотя сами по себе построения выглядят чрезмерно искусственными, а некоторые выводы далеко не бесспорны [21]. Так, например, сомнительно утверждение о том, что элемент под номером 118 должен быть последним в периодической системе элементов. Тем не менее при моделировании в ряде областей (особенно гуманитарных) следует учитывать возможную роль подобных закономерностей, считая их некоторыми феноменологическими законами. Особенно глубокий смысл может иметь сам принцип нарушенной симметрии – как известно, в природе нет ничего абсолютно симметричного, и это легко объяснимо: полная симметрия возможна только в статике, при отсутствии какого-либо движения, развития. Но во Вселенной статика может означать лишь коллапс...

В заключение приведем еще одно любопытное наблюдение. Оказывается, последовательность критических возрастов в жизни мужчин совпадает с отрезком ряда Фибоначчи

5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.

Таким образом, переломы в физиологии, психике и мировоззрении в возрасте 21, 34 и 55 лет определяют жизненный путь взрослого мужчины, и трем основным этапам жизни – с 21 до 34, с 34 по 55 и после 55

лет – должны отвечать три качественно различных вида деятельности, соответствующие психофизиологическим особенностям этих этапов.

Указанные критические точки обнаруживаются в биографических материалах А. С. Пушкина, И. В. фон Гёте, Л. Н. Толстого, Н. В. Гоголя, Дж. Верди, А. П. Бородина, Л. ван Бетховена.

Периодичность в жизни женщины подчиняется другому рекуррентному ряду, а именно, ряду Люка. Ряд Люка является производным рядом, построенным из ряда Фибоначчи следующим образом. Пусть $\{U_i\}$ – ряд Фибоначчи ($U_1 = 1, U_2 = 2, U_{i+2} = U_{i+1} + U_i$), тогда

$$L_i = \frac{U_{2i-1}}{U_{i-1}}$$

для $i \geq 2, L_1 = 1$. Получаем

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots$$

Соответствующий “мужскому” отрезок имеет вид

$$4, 7, 11, 18, 29, 47, 76.$$

Возрастные периоды женщины аналогичны мужским, но критические значения возраста наступают раньше, и чем больше возраст, тем больше эта разница. По-видимому, эта закономерность хорошо отражает физиологические, психологические и генетические различия мужчин и женщин¹.

¹При подготовке настоящего параграфа использованы материалы экзаменационной работы магистрантки второго курса Е. В. Филипповой.

Глава 3. Моделирование в гуманитарных науках

XX век характеризуется бурным развитием прикладной математики, т. е. по существу, математизацией всех без исключения отраслей науки, в том числе и гуманитарных. Причем наибольший успех достигается в тех областях, где применение математических методов не носит самодовлеющего характера, а органически вплетается в процесс научного поиска. Математика не может доказывать неформализованные утверждения, но может помочь вскрыть новые факты и закономерности, а также оценить степень их достоверности в рамках исходных начальных данных и предположений.

3.1. Математика и музыка: от Пифагора к XXI веку

В античные времена математика и музыка представляли собой одну область человеческих знаний. И даже скорее не “алгеброй поверяли гармонию”, а гармонией – алгебру. Известно, в частности, что древнейшим предшественником современного рояля является монохорд – простой однострунный инструмент древнегреческих теоретиков, служивший им для математических вычислений и определения звуковых интервалов [22]. Позже была добавлена вторая струна, которая использовалась для контроля высоты звука и величины интервала. Из Рима и Византии монохорд вместе с идеями Пифагора проник в Западную Европу. В средние века музыка, по-видимому, рассматривалась как наука точная. Об этом свидетельствовало включение ее не в “тривиум” (первую ступень университетского обучения, в которую включались грамматика, риторика и логика), а в “квадривиум” – вторую ступень, содержащую наряду с музыкой арифметику, геометрию и астрономию. Это соответствовало традиции воссозданного в IX веке Константинопольского университета, в программе которого музыка была также отнесена к естественным наукам [23].

Пифагорейские идеи оказали немалое влияние на эволюцию музыкальной науки. Музыкальные теоретики знали, что длины струн, дающих “чистые” интервалы, соотносятся как небольшие целые числа, и чем эти числа меньше, тем консонанс (созвучие) совершеннее. “Гармония чисел” распространялась и на аккорды. Впоследствии оказалось возможным записать все соотношения интервалов, аккордов и тональностей на языке математической теории групп.

С развитием гуманистических идей математика и музыка все более и более отдаляются, несмотря на появление в последующие времена (до XX века включительно) многочисленных работ, посвященных широкому спектру проблем – от исследования различных симметрий в музыке –

в гармонии, в ритмике, в форме – до числовой мистики. Однако ни одна позднейшая работа, посвященная не формальным, а содержательным вопросам музыки, не оставила заметного следа в теоретическом музыкознании. И это понятно – на протяжении тысячелетней эволюции с IX по XIX век европейская музыка, постепенно теряя черты “отрасли науки”, все больше становится искусством. На первый план выходит художественность, содержательность, эмоциональность, что все чаще сопровождается отказом от канонов и застарелых догм и интенсивным творческим поиском. Немногочисленные исключения – например, открытие С. И. Танеевым нового вида контрапункта строго математическим методом – только подтверждают общее правило.

Причиной явной неудачи применения в этих сферах музыки математических методов (в том числе теории групп и т. п.) явился феноменологический подход, основная задача которого состоит в описании, в лучшем случае – в анализе, но никоим образом не в синтезе или поиске причинно-следственных связей. Постановка задачи абсолютно не соответствовала применяемым методам, не предполагала использования наиболее сильных сторон математики – моделей, доказательств, возможности широкого обобщения, наконец, не отвечала возросшим требованиям к теоретической области науки. Это положение начало меняться лишь с середины XX века.

Однако в настоящем разделе мы коснемся тех вопросов музыкознания, которые относятся к традиционным разделам математики. Это в первую очередь строение звукоряда. Выше мы отмечали, что еще пифагорейцы знали о “гармонии чисел” в музыке – если частоты колебаний относятся как небольшие целые числа, то звуки будут консонирующими, т. е. будут хорошо сливаться и образовывать приятно звучащий интервал. Так, звук “до второй октавы” (c^2) имеет частоту, вдвое превышающую частоту звука “до первой октавы” (c^1), а частота звука “соль первой октавы” (g^1) превышает частоту c^1 в полтора раза. Иными словами, отношение частот в октаве 2:1, в квинте – 3:2. Октава состоит из 12 полутонов, квинта – из 7 (полутонов – интервал между двумя соседними клавишами на фортепиано независимо от их цвета). Поэтому 7 октав составляют 12 квинт, и если все полутона одинаковы, то должно выполняться тождество

$$2^7 \equiv \left(\frac{3}{2}\right)^{12}.$$

Однако это невозможно. Поэтому если мы хотим пользоваться всеми возможными тональностями, то должны привыкнуть к мысли, что “чистого” строя мы не достигнем никогда [24].

Но так ли нужно равенство полутонов или, как говорят специалисты,

равномерная температура? До конца XVII века все инструменты были настроены в “чистом” строе (заметим, что и сейчас на инструментах, допускающих плавное изменение высоты тона – скрипке, виолончели, тромбоне – можно играть в “чистом” строе). При этом различные тональности различались по звучанию: тональности с небольшим количеством знаков альтерации в ключе (диезов или бемолей) и, особенно, вообще без знаков (до мажор и ля минор) звучали правильно, чисто. По мере увеличения числа ключевых знаков звучание тональности становилось все жестче, доходя до откровенной фальши в тональностях, имеющих по 5-7 ключевых знаков. Происходит это потому, что в “чистом” строе гамма состоит из некоторой последовательности **разных полутонов**, и, начиная гамму с другой ноты, мы, естественно, получаем и другую последовательность, звучащую “менее правильно”. Именно это обстоятельство явилось одной из причин “образной окрашенности” разных тональностей. Иными словами, каждой тональности сопоставляется своя образная сфера (об этом см. далее).

С другой стороны, возможность контраста, сопоставления различных образных сфер (т. е. различных тональностей) является необходимым условием динамики развития музыкального произведения – сочинение, написанное исключительно в одной тональности, производит впечатление монотонной тавтологии (если, конечно, у автора нет для этого достаточно убедительных художественных оснований, либо других средств для динамизации произведения²). Это характерно как для музыки гомофонно-аккордового склада, так и для полифонических произведений. Естественно, возникла тенденция к расширению круга употребительных тональностей, чему препятствовало несовершенство принятого звукоряда. Поэтому на рубеже XVII-XVIII веков возникают циклы произведений, объединяющие пьесы, написанные во всех 12 мажорных и 12 минорных тональностях (наиболее известный цикл такого рода – “Das Wohltemperierte Klavier” BWV 846-893 [25]). Это, в свою очередь, стимулировало введение равномерной температуры в музыкальную практику и развитие исполнительской техники; далее, вслед за этим наметился очевидный прогресс в конструировании духовых музыкальных инструментов – вводятся новые клапаны, изобретаются клапанные системы (система Геобальда Бёма для флейты). Напомним, что до середины XVIII века деревянные духовые инструменты были диатоническими и воспроизводили только обычную гамму (“без диезов и бемолей”), а медные духовые были вообще натуральными и воспроизводили лишь гармоника одного основного тона (лишь тромбон в силу своей конструкции был хроматическим инструментом).

²Хорошим контрпримером служит, например, “Болеро” М. Равеля.

Поэтому в течение почти двух веков в качестве стандарта принята равномерная логарифмическая шкала, в которой отношение частот звуков, составляющих полутоновый интервал, для произвольного полутона равно

$$\frac{\omega_{k+1/2}}{\omega_k} = \sqrt[12]{2}.$$

Возникает естественный вопрос – если достигнуто полное равноправие тональностей, то каким образом сохраняются ассоциации тональностей с образными сферами? Во-первых, существенную роль играет традиция, а также то, что человеческое ухо не “настроено” на интервалы с иррациональным соотношением частот. Во-вторых, равноправие тональностей достигнуто теоретически, а практически различные ноты все же не равноправны: эталоном настройки остается фиксированная нота – ля первой октавы (a^1) с частотой 440 Гц. Так как настройка осуществляется начиная с некоторого выделенного звука на слух, полного равноправия полутонов достичь не удастся. Тем более это справедливо по отношению к инструментам, остающимся по существу диатоническими или натуральными – введение коррегирующих клапанов выравнивает звукоряд, но оставляет изрядную свободу для исполнителя. Г. Е. Шилов [24] отмечает: «...музыканты считают, что тональности обладают и индивидуальными качествами. Так, например, считается, что *до мажор* характерен для светлого, солнечного, спокойного настроения (соната Бетховена “Аврора”), *ми мажор* – для взволнованного, страстно-напряженного переживания (многие произведения Листа, романс “День ли царит” Чайковского), *фа диез мажор* – для радостно-возвышенных ощущений (“Весной” Грига); *до минор* – для мужественной печали (“Похоронный марш” из Героической симфонии Бетховена); *ми бемоль минор* – для глубоко трагических состояний (романс Полины из “Пиковой дамы” Чайковского). Пока еще не выяснено, отражаются ли в такого рода суждениях какие-либо объективные закономерности, или же мы имеем дело лишь с устоявшейся традицией. Возможно, впрочем, что процесс настройки музыкальных инструментов в силу особенностей слуха приводит фактически не к равномерным, несколько жестким, а к слегка смягченным интервалам музыкальной шкалы... Во всяком случае, наука не стоит на месте и раньше или позже придет к объяснению и этой и других необъясненных еще закономерностей музыки». Впрочем, трактовки образных и эмоциональных сфер, связанных с конкретными тональностями, могут отличаться в деталях от указанных, но общий настрой в целом совпадает.

К началу XX века возникло ощущение, что возможности классической гармонии уже исчерпаны или почти исчерпаны. Композиторы со-

чиняют произведения, обильно оснащенные атональными и политональными фрагментами, широко используется тритон. На протяжении развития европейской музыки мы от бесстрастной средневековой музыки через богатство музыки Возрождения, Барокко, Классицизма, Романтизма снова приходим к бесконтрастной, монотонной атональной музыке, все отличие которой от средневековой состоит в том, что на смену консонантности пришло торжество диссонанса. При этом, несмотря на гипертрофированный экспрессионизм, музыка эта не производит впечатление динамичной, в ней нет стимула к движению, к развитию, так как нет контраста.

Логическим завершением этой тенденции стала концепция Арнольда Шёнберга. Он исходит из основной предпосылки о полном равенстве между собой всех двенадцати полутонов хроматического звукоряда, ни один из которых не имеет преимуществ перед другим. Композитор составляет двенадцатитонный ряд, представляющий собой комбинацию из всех двенадцати ступеней хроматической гаммы, причем ни один звук ряда не может повторяться раньше, чем прозвучат остальные одиннадцать. Допускаются свободное перемещение тонов из одной октавы в другую. В дальнейшем этот ряд или “серия” может подвергаться следующим преобразованиям: а) “обращение”, или инверсия, при которой все интервалы ряда строятся в обратном направлении; б) “ракоходное обращение” – движение от конца к началу и, наконец, в) “инверсия ракоходного обращения”. Легко видеть, что эти преобразования (вместе с тождественным) образуют группу Клейна \mathfrak{D}_2 ... В дальнейшем соратник А. Шёнберга Антон Веберн довел додекафонию практически до абсурда, провозгласив принцип “тотальной организации музыки”, по которому серийности подчиняются все характеристики музыки – динамика, инструментовка, длительности и даже паузы.

Выдающийся композитор XX века Артюр Онеггер писал [26]: “Серийная система базируется на очень узком своде законов: додекафонисты кажутся мне чем-то вроде каторжников с галер, которые, порвав свои цепи, взамен приковали с своим ногам стокилограммовые чугунные ядра, чтобы быстрее бежать... Их догма во многом напоминает школьный контрапункт, с той, однако, разницей, что овладение контрапунктом открывает широкие возможности для повышения техники письма, для развития фантазии, в то время как правила двенадцатитоновой системы являются не средством к достижению этой цели, но самой целью!...”

По существу, додекафонная теория (и ей подобные “системы”) отходит от художественных принципов искусства и ставит во главу угла принцип научный – создавать то, что никто еще не создавал. Подобный принцип (эмансипация диссонанса и обязательный отказ от консонант-

ных гармоний) – является, по существу, **аксиомой**, не следующей из основ или содержания музыки. Конечно, в процессе становления “музыки авангарда” были найдены новые приемы, которые в ряде случаев оказываются на редкость выразительными³. Тем не менее очевидно, что “научный” путь развития музыки не имеет ничего общего с ее предназначением как отрасли искусства. В нашу задачу не входит подробное рассмотрение различных течений авангарда, мы лишь иллюстрируем причины неудач прямого применения точных научных методов в искусстве, в частности, в музыкальном.

В данном разделе мы намеренно не рассматриваем музыкальную акустику, довольно рано выделившуюся в самостоятельную дисциплину, родственную некоторым разделам математической физики. Описание даже части актуальных и не решенных до сих пор задач требует, безусловно, отдельной публикации. Более того, ряду вопросов посвящены целые монографии, например, проблеме выбора материала и оптимальной формы резонаторов струнных музыкальных инструментов (краткое обсуждение см. в [27]), загадкам звучания и проблемам расчета колоколов [28]. Обширный справочный материал по музыкальной акустике и музыкальному восприятию (маскировка звуков, комбинационные тоны) приведен в [29].

Далее мы переходим к некоторым проблемам музыкознания, которые до последнего времени считались неформализуемыми.

3.2. Биоритмы и внутренние взаимосвязи в музыкальном творчестве

Следует обратить внимание на два принципиальных положения.

Во-первых, математические методы в применении к музыкознанию играют роль вспомогательного аппарата, который позволяет:

- 1) выявлять новые факты и закономерности (на уровне гипотез);
- 2) оценивать достоверность того или иного утверждения, особенно при наличии нескольких (взаимоисключающих) гипотез;
- 3) проводить независимую проверку утверждений, базирующихся на опытном материале. Иными словами, математика никоим образом не претендует на то, чтобы стать альтернативой традиционным методам музыкознания.

Во-вторых, математика оперирует лишь с формализованными величинами (количественными или ранжированными), причем единица измерения выбирается из условий данной конкретной задачи. Например,

³Например, “Трен памяти Хиросимы” польского композитора Кшиштофа Пендерецкого.

выбор такта в качестве единицы объема музыкального произведения совсем не означает равенства художественной ценности тактов детского менуэта и 40-й симфонии Вольфганга Амадея Моцарта. Следует подчеркнуть, что под любой математизацией подразумевается строгая постановка задачи и строгие рамки применения исходных предположений.

1. Биоритмы творчества. Общеизвестно, что влияние биоритмов на жизнедеятельность человека огромно. Все жизненные функции организма в той или иной мере подчинены ритмам – суточным, недельным, месячным, сезонным, годовым. Эти же периоды можно довольно легко распространить и на сферы деятельности, связанные с физическим трудом. И в том, и в другом случае речь идет о периодичности, выявляемой за сравнительно небольшой промежуток времени, а главное, существуют простые количественные критерии изучаемого процесса (например, частота пульса или интенсивность биотоков для жизненных функций организма и количество обработанных в единицу времени деталей – для физического труда). Поиск же биоритмических закономерностей творчества сразу же наталкивается на два существенных препятствия. Во-первых, если нас интересуют ритмы с периодом в несколько лет, то сколько же времени будет длиться эксперимент по наблюдению четырех-пяти полных колебаний? И это уже не считая того, что процесс творчества, как правило, не терпит вмешательства извне, а результат творческой работы значительно менее устойчив к изменению внешних условий, чем работоспособность в физической сфере или, тем более, частота дыхания или естественная смена сна и бодрствования.

Во-вторых, как измерить трудоемкость творческого процесса? Ведь бессмысленно было бы оценивать труд, вложенный в симфонию, весом партитуры, а в картину – килограммами истраченной краски. Здесь сразу же следует сделать небольшое отступление: существующие произведения искусства можно (весьма грубо) разделить на две категории: 1) музыкальные сочинения, литературные и драматические произведения, кинофильмы и 2) произведения живописи, скульптуры и архитектуры. Различие между этими категориями состоит в том, что любой представитель первой воспринимается как объективный процесс, развитие которого во времени детерминируется автором, тогда как представитель второй категории является как бы вещью, данной целиком, одновременно, процесс восприятия субъективен и не зависит от воли создателя. Сравните – можно сказать “начало симфонии”, но нельзя – “начало пейзажа”. Понятно, что деление это весьма условно – достаточно указать на музыкальные сочинения с элементами алеаторики (случайная музыка) и, например, серии исторических картин, объединенных общим сюжетом (здесь на субъективность восприятия отдельного полотна на-

кладывается детерминизм реального исторического времени).

Для нас существенно то, что практически любое музыкальное произведение объективно соотносится с временным процессом, с интервалом времени, и такой интервал можно измерить. Это приводит нас к определению численных характеристик трудоемкости сочинения, что позволяет не только провести статистическую обработку, но и попытаться построить усредненную (детерминированную) модель, особенно, если удалось измерить несколько существенно различных численных характеристик творчества. Если в первом приближении рассматривать динамику двух параметров творчества – продуктивности и поисковой активности, то весьма плодотворной оказывается уже простейшая модель, применяемая для изучения экологического равновесия в замкнутой системе “хищник-жертва”. Запишем систему (34) в следующей форме

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 x - \gamma_1 xy, \\ \dot{y} = -\alpha_2 y + \gamma_2 xy. \end{cases} \quad (38)$$

Действительно, использование (“поедание”) новых идей и переработка их в продукт творчества (“размножение хищника”) в известной степени аналогичны процессам, протекающим при взаимодействии популяции “хищника” с популяцией “жертвы” [1]. Таким образом, при разумном введении численных параметров продуктивности и активности (творческого поиска), например, композитора, можно использовать не только мощный аппарат статистики, но и логичную простую модель. В этой модели динамики творческого процесса $x(t)$ – творческая активность (количество инноваций), $y(t)$ – продуктивность, т. е. объем нового (сочиненного) материала. Коэффициенты в системе (38) имеют следующий смысл: α_1 – интенсивность “фоновой” генерации идей, γ_1 – интенсивность “выедания” за счет реализации, отбраковки и морального старения идей, α_2 – естественная убыль продуктивности за счет уменьшения набора инноваций, усталости и т. п., γ_2 – увеличение продуктивности за счет “свежих” инноваций. Нетрудно видеть аналогию с моделью Вольтерры – например, скорость “выедания”, т. е. использования идей, пропорциональна произведению продуктивности и творческой активности.

Альтернативными моделями к модели (38) является система уравнений Лесли

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 x - \gamma_1 xy, \\ \dot{y} = \alpha_2 x + \gamma_2 \frac{y^2}{x} \end{cases}$$

– здесь продуктивность зависит от числа идей на единицу продукции – и более общая система

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - \Phi(x)y, \\ \dot{y} = -\alpha_2 y + k\Phi(x)y, \end{cases}$$

где $\Phi(x)$ – интенсивность “хищничества”, k – эффективность превращения жертвы в хищника, и $f(x)$ – скорость генерации идей независимо от их использования. Мы не будем подробно рассматривать эти модели, так как для анализа музыкального творчества более удобными оказываются модели, построенные на основе модели Вольтерры.

Теперь осталось преодолеть последнее препятствие – чрезмерную продолжительность эксперимента при выявлении “длинных” биоритмов. И здесь есть очень простое решение проблемы – надо использовать информацию о великих композиторах прошлого, т. е. обработать данные эксперимента, уже проведенного историей. Понятно, что при выборе композитора для исследования биоритмики его музыкального творчества надо руководствоваться рядом условий, гарантирующих полноту и правдоподобность результатов эксперимента. В частности, нужно, чтобы творческое наследие композитора было хорошо изучено и включало большое число сочинений (несколько сот), подавляющее большинство которых известно в настоящее время и датировано (хотя бы с точностью до года). Поэтому биоритмика творчества Иоганна Себастьяна Баха и Антонио Вивальди вряд ли будет подробно изучена в ближайшее время, так как, несмотря на громадное количество сохранившихся сочинений (более 1000 в наследии И. С. Баха и около 800 А. Вивальди), датировка большинства из них не совсем точна. Еще сложнее исследовать творческое наследие Георга Филиппа Телемана (более 1000 сочинений), которое пока что полностью не каталогизировано.

Таким образом, в настоящее время можно изучать крупные собрания сочинений более близкой к нам эпохи – В. А. Моцарта, Людвиг ван Бетховена, Франца Шуберта (а из современников И. С. Баха, возможно, лишь Георга Фридриха Генделя). И чем ближе к нам эпоха, тем, в среднем, больше информации о каждом сочинении, но меньше объем творческого наследия каждого отдельного композитора, что ухудшает достоверность статистических оценок. Музыкальный язык становится все более сложным, а следовательно, более трудным будет и анализ каждого сочинения. Поэтому остановимся на композиторе, оставившем около 800 сочинений, из которых более 700 достоверно датированы. Это – В. А. Моцарт. О его жизни так много известно и тем не менее так хотелось бы узнать еще больше.

Как ни парадоксально, но наиболее удобной характеристикой продуктивности является количество тактов, написанных композитором за определенный период времени (год, месяц, неделю). Бесспорно, по значи-

мости, по художественной ценности и тем более по восприятию с точки зрения слушателя XX века такты одного и того же сочинения и, особенно, разных сочинений (пусть даже одного и того же композитора) могут быть резко различны. Однако прежде всего для исследования представляет интерес не качество сочинения (включая сегодняшнюю его оценку), а мера необходимого труда, вложенного в сочинение. Следовательно, требуется выяснить параметр продуктивности, определенный в собственном времени композитора, а не в нашем теперешнем. И трудно установить, что отняло у В. А. Моцарта больше сил: сочинение такта бессмертной 40-й симфонии или сочинение такта менуэта, например, в 1762 г.

Отметим также, что с учетом закономерного соответствия формы содержанию (что особенно характерно, в частности, для сочинений Моцарта), число тактов дает нам и оценку информационного содержания произведения. Это рассуждение диктует введение нормировочного коэффициента – поправки на размер (в зависимости от размера меняется информативность такта; например, у ранних венских классиков такт 4/4 вдвое более информативен, чем такт 2/4. Так, изложение первой части 40-й симфонии Моцарта в размере 2/4 практически не изменит характера сочинения, но удвоит число тактов. Предпочтение, отданное В. А. Моцартом размеру 4/4, можно объяснить, по-видимому, нежеланием композитора излагать первую часть симфонии – драматургический центр сочинения – в размере, напоминающем танцевальный ритм контрданса).

Численную характеристику поисковой активности (число новых идей за определенный период времени) определить гораздо сложнее, так как даже сам композитор, возможно, не представлял, сколько новых идей было у него в тот или иной момент. Поэтому приходится строить комплексный критерий, учитывая индивидуальность автора. Это не исключает, в известной степени, и универсальных компонент критерия, в качестве которых можно использовать меру разнообразия выразительных средств и удельный объем незаконченных произведений (проб). В первой компоненте учитывается предположение о том, что в процессе поиска затрагивается более широкий круг выразительных средств (например, тональностей, т. е. по существу – образных сфер, а также жанров, форм и т. п.), чем в установившемся периоде творчества. Особенно следует обращать внимание на редкие, необычные для композитора приемы и формы. Математически разнообразие выражается “разбросом” формальных параметров творчества и может быть измерено так называемыми энтропиеподобными мерами. Вторая компонента вводится, потому что поиск, как правило, сопровождается относительно бóльшим числом проб. Заметим, что по имеющимся данным, Моцарт “слышал” любое свое сочине-

ние от начала и до конца, и если он не записал его, значит эта проба по каким-то условиям его не удовлетворила.

К указанным двум компонентам добавляются оценки активности по “разовым” критериям – баллы за новизну жанра (в годы сочинения первой в жизни симфонии, мессы, оперы, концерта и т. д.) и баллы за новизну впечатлений (творческие контакты, влияния и поездки, причем имеются в виду, конечно, не дорожные впечатления, а соприкосновение с иной музыкальной средой – в Париже, в Лондоне, в Италии, в Мангейме и т. п. Изучение параметров среды являлось необходимостью – без овладения любимыми формами, жанрами и др. какого-либо музыкального центра достижение успеха становилось весьма проблематичным). В итоге комплексный критерий – численная оценка активности – получается суммированием всех компонент, умноженных предварительно на фиксированные весовые коэффициенты. Проведенная проверка показала, что определенная таким образом величина активности является устойчивой к вариациям системы весовых коэффициентов, т. е. вид графика зависимости этого параметра от времени мало меняется при изменении шкалы критериев (модель удовлетворяет требованию робастности).

В результате исследований всех сохранившихся сочинений В. А. Моцарта (частично была использована и информация о ряде утерянных сочинений) выявлена почти строгая антифазность кривых продуктивности и активности композитора (рис. 12) [1, 30].

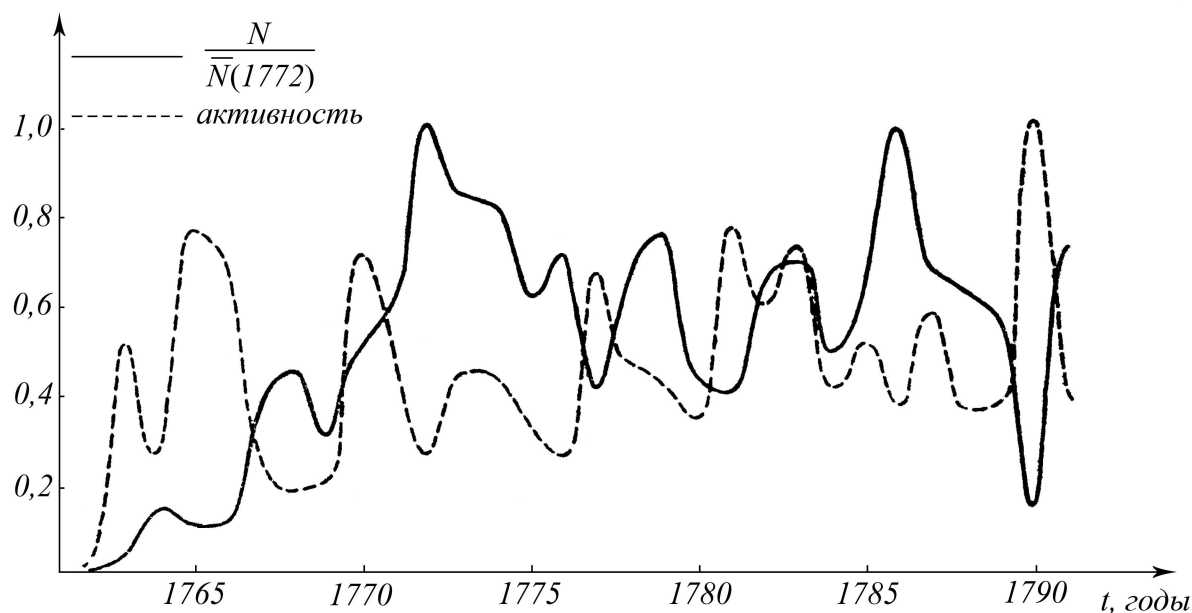


Рис. 12. Продуктивность и творческая активность В. А. Моцарта с 1762 по 1791 г. Продуктивность дана в соответствии с максимальным уровнем 1772 г., активность – по комплексному критерию условных единиц

Сбой антифазности наблюдался лишь в 1782–1784 гг., что безусловно, связано с перестройкой творческого процесса композитора под влиянием

ухода со службы при дворе архиепископа Зальцбургского. По аналогии с экологической моделью можно утверждать, что Моцарт очень быстро реализовывал свои идеи; этот факт косвенно подтверждается свидетельствами современников, письмами, а также тем, что композитор никогда не использовал в новых произведениях материал старых и никогда не возвращался к неоконченным (за тремя исключениями: неоконченная месса до минор KV 427–417a была переработана в кантату “Кающийся Давид” KV 469, fuga для двух клавиров KV 426 – в fugу для струнного квартета с добавлением Адажио KV 546 и серенада для духовых инструментов KV 388 – в струнный квинтет KV 406–516b; здесь и далее KV с цифрами означает номер произведения по каталогу Кёхеля [31]). По-видимому, такой характер взаимосвязи продуктивности и активности присущ также творчеству Антонио Вивальди, Франца Шуберта, Джоаккино Россини, Гаэтано Доницетти (и, возможно, Йозефа Гайдна). Напротив, можно ожидать синфазности колебаний указанных параметров творчества у таких композиторов, как Людвиг ван Бетховен, Иоганнес Брамс, Антонин Дворжак, Петр Ильич Чайковский (“медленная реализация”). И если “скородумы”, как правило, использовали очень мало эскизов, почти никогда не возвращались к ранее написанному и в их гигантских наследиях трудно найти сочинение, не отличающееся высокими художественными достижениями, то “тугодумы”, напротив, долго вынашивали замысел каждого произведения, набрасывали множество эскизов, неоднократно возвращались к старым сочинениям, перерабатывали их, даже уничтожали, и все-таки в их наследиях довольно легко обнаруживаются сочинения, не представляющие интереса для слушателя. Нелишне заметить, что автор не вкладывает в условные термины “скородум” и “тугодум” никакого оценочного смысла (как положительного, так и отрицательного) – композитор-“скородум” может создать массу произведений среднего уровня, но, не поднявшись ни в одном из них выше, вскоре будет забыт, тогда как композитор-“тугодум” может работать всю жизнь над одним шедевром, который обессмертит его имя. Может быть, основная разница – в наличии или отсутствии врожденного чувства формы?

Косвенно это подтверждается сравнением общей продуктивности, например, Людвиг ван Бетховена и Франца Шуберта. Бетховен прожил неполных 57 лет, из которых сочинял 46 лет. За это время им сочинено, согласно каталогу Кински [32], 343 произведения (новейший каталог Giovanni Biamonti содержит 849 сочинений, но в нем указано огромное число фрагментов и эскизов, использованных автором в дальнейшем). Шуберт прожил всего 32 года, из которых сочинял 18 лет. Согласно последней версии каталога Дейча (Otto Erich von Deutsch) им сочинено

998 (!) сочинений, при этом, как указывалось выше, практически все они оригинальны.

Фазовый сдвиг можно объяснить и в терминах модели творчества: у композиторов первого типа быстрое “выедание” появляющихся идей не дает им накопиться, т. е. при резком увеличении продуктивности набор идей так же резко обедняется (антифазность); у композиторов второго типа пик продуктивности соответствует “выеданию” ранее накопленных идей, а сам процесс сочинения генерирует новые идеи, остающиеся пока неиспользованными (синфазность). В качестве уточненной модели была предложена обобщенная система Вольтерры [33]

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 x + \beta_1 y - \gamma_1 xy - \delta_1, \\ \dot{y} = \alpha_2 x - \beta_2 y + \gamma_2 xy - \delta_2 + \lambda x^2 - \mu y^2. \end{cases}$$

Но вернемся к биоритмам. Прежде чем обсуждать результаты спектрального анализа построенных характеристик, укажем, что творчество любого композитора многокомпонентно, и сочинения, написанные вследствие неодинаковых причин, принадлежат различным компонентам. В наследии В. А. Моцарта можно условно выделить три компонента:

- 1) творчество “на заказ”;
- 2) творчество под влиянием внутренних причин;
- 3) творчество под влиянием внешних случайных причин (реакция на события и окружение).

Лишь вторая компонента должна быть в точности периодической, следуя закономерным переходам от подъемов творческой активности к спадам. Однако логично предположить, что продуктивность в первой компоненте также сильно зависела от фазы творческого ритма, так как композитор имел некоторую свободу выбора – принять заказ или нет, варьировать в известной степени форму и информационное содержание, а следовательно – и объем сочинения. И лишь третья компонента имела, по-видимому, чисто случайный характер: объем принадлежащих ей сочинений зависел не столько от фазы творческого периода, сколько от характера реакции композитора на случившееся событие. На практике оказалось далеко не всегда возможным определить принадлежность каждого произведения конкретной компоненте. Поэтому спектральный анализ (представление временной зависимости в виде суммы элементарных колебаний – синусоид, каждая из которых задана набором трех величин – амплитудой, частотой и фазой) был проведен для двух кривых продуктивности, построенных отдельно для сочинений, написанных в мажоре и в миноре. Продуктивность в мажорных тональностях имеет явную периодичность с величиной периода, равной 7,5–8 годам. Определены также ритмы с периодами около 4 и 2 лет (вторая и четвертая гармоники основного

колебания). К аналогичному результату приводит и анализ временных рядов, построенных на основе мер разнообразия (энтропий) мажорных тональностей.

Совершенно иная картина наблюдается во временной зависимости продуктивности в минорных тональностях. Спектр этой кривой не имеет явно выраженных максимумов и минимумов и напоминает “белый шум” (спектр звукового шума без выраженного основного тона). Поэтому все минорные сочинения Моцарта принадлежат третьей компоненте, и наличие среди этих произведений “заказных” свидетельствует лишь о том, что получение заказа совпало с каким-либо волнующим композитора событием; следует учесть, что “минорность” сочинения никогда не оговаривалась в заказе (это справедливо и в отношении Реквиема; известны реквиемы, написанные современниками Моцарта в мажорных тональностях).

Заметим, что биоритм с периодом около 7-8 лет является, по-видимому, универсальным, хотя строгих доказательств этого факта пока нет. Известно лишь то, что в имеющихся монографических работах о выдающихся ученых, писателях, поэтах, композиторах, художниках различные исследователи независимо друг от друга делят творческий путь на периоды, близкие по продолжительности к указанному значению. Впервые это было замечено, вероятно, в 1925 г. Н. Я. Пэрна [34]. Строгое доказательство существования универсального “длинного” биоритма творческих процессов могло бы иметь огромное значение, например, для планирования научного поиска и процесса подготовки квалифицированных научных кадров.

2. Внутренние закономерности творчества: реальность и подсознание. Помимо ритмов “вынужденных”, отражающих связи творческой активности и биологического состояния, творческому процессу присущи и ритмы “собственные”, проявляющиеся как взаимозависимость различных формальных параметров творчества – тональностей, форм, инструментов и т. п. “Собственные” ритмы связаны с “вынужденными” тем, что периоды их совпадают или кратны, а вот фазы, как правило, отличаются – колебания одних параметров опережают основной биоритм, других – запаздывают. Система взаимосвязей между формальными параметрами порождает некую “внутреннюю логику” процесса творчества, и ее также можно выявить математическими методами.

Как и в случае суммарной продуктивности или продуктивности в мажоре или миноре в отдельности, можно составить временные ряды по продуктивности в каждой из девяти мажорных и восьми минорных тональностей, использованных Моцартом, а также в каждом из 25 инструментов (среди них, помимо широко распространенных, есть и редкие –

например, стеклянная гармоника). Таким образом, получаются исходные матрицы мажоров (9×30), миноров (8×30), инструментов (25×30) и совместная тональная (17×30). Число 30, входящее в размерность матрицы, указывает число лет творчества (1762-1791), учтенных при подсчетах. Все матрицы построены одинаково. На пересечении i -й строки и j -го столбца стоит число a_{ij} тактов в 1-м мажоре, миноре или для 1-го инструмента, написанных Моцартом в j -м году. Наличие таких матриц позволяет найти численную характеристику зависимости строк (или столбцов), понимаемых как случайные величины, между собой, или, используя математическую терминологию, вычислить коэффициент корреляции между индивидуумами (годами творчества) или признаками (различными формальными параметрами). Так получают корреляционные матрицы – таблицы коэффициентов корреляции мажоров (9×9), миноров (8×8), всех тональностей совместно (17×17), инструментов (25×25) и разных лет творчества между собой (30×30).

Последние матрицы интересны прежде всего тем, что позволяют независимым образом проверить величину периода биоритма. Исходя из гипотезы о сходстве одинаковых фаз в разных циклах (периодах) творческого процесса, можно ожидать, что на N -ный год творчества будут похожи годы с номерами $N + rT$, где T – период биоритма, r – целое число. Обработка корреляционных матриц “по годам” (30×30) показывает, что за исключением “ближних связей” (сходства формальных параметров в пределах двух-трех лет творчества, легко объяснимого работой в стабильных условиях в течение этого срока – с одним кругом заказчиков, с одним оркестром, с одними солистами и т.п.), значимыми являются связи длиной 7-8, 14–16, 21–23 года. Это снова указывает на величину периода основного колебания в 7–8 лет [30].

Корреляционные матрицы по признакам (формальным параметрам) удобнее всего представлять в виде дендрита (“дерева”) – графика, начало отсчета которого совпадает с максимальным коэффициентом корреляции (+1) и с полным набором ветвей. Каждая из них соответствует своему признаку. По мере продвижения вдоль оси абсцисс (вправо), сопровождающегося уменьшением коэффициента корреляции, ветви соединяются в точках с абсциссой, равной коэффициенту корреляции между признаками. Естественно, чтобы избежать многозначности при построении “дерева”, надо сначала перенумеровать элементы корреляционной матрицы в порядке их убывания.

Построение “дерева” позволяет разбить все множество признаков (возможных значений формальных параметров) на подмножества тех значений признаков, которые связаны между собой больше, чем с элементами других подмножеств (по крайней мере исходя из величины коэффициен-

та корреляции). Такие подмножества называют кластерами. Корреляционная матрица “по инструментам” дает кластеры инструментов, устойчиво сохраняющиеся в большинстве сочинений В. А. Моцарта (естественно, с учетом жанра). Так выделяется кластер “скрипка – альт – бас (инструментальный) – гобой – валторна” – “элементарная ячейка” моцартовского оркестра. Другие инструменты появляются в оркестре не всегда – в порядке убывания коэффициента корреляции к этому составу присоединяются последовательно труба (с литаврами), фагот, кларнет и лишь затем – флейта. Виолончель (нотированная отдельно, вне инструментального баса) входит в другую группу (редких инструментов), поскольку Моцарт не рассматривал ее в качестве солирующего инструмента. Об этом можно судить хотя бы по тому факту, что композитор не написал ни одной сонаты для виолончели и фортепиано и ни одного концерта (имеется лишь фрагмент первой части), тогда как скрипичных концертов известно шесть (не считая кончертоне, концертной симфонии и отдельных частей), для флейты с оркестром – два (и Анданте KV 312–189i), для валторны с оркестром – четыре, и известны также концерты для гобоя, кларнета, фагота.

Результаты обработки корреляционной матрицы 25×25 (по инструментам) не дали ничего неожиданного, они лишь подтвердили правомерность корреляционного анализа для изучения внутренних взаимосвязей творчества – “внутренней логики” [30]. И именно благодаря этому можно интерпретировать корреляционные матрицы 9×9 (“по мажорам”) и 8×8 (“по минорам”). Девять мажорных тональностей распадаются на два кластера по три (первый – соль мажор, ре мажор и ля мажор; второй – ля-бемоль мажор, до мажор и ми мажор), к ним последовательно присоединяются остальные, причем последним – фа мажор (рис. 13).

Тот факт, что тональность фа мажор слабее других связана с остальными тональностями, можно легко объяснить: фа мажор – признанная пасторальная тональность (например, “сельские” концерты А. Вивальди, органные пасторали И. С. Баха, “Секстет деревенских музыкантов” В. А. Моцарта, 6-я “Пасторальная” симфония Л. Бетховена). Первый кластер также весьма обычен ($G - D - A$): тональность ре мажор очень удобна для скрипки и является одной из наиболее распространенных в венском классицизме тональностей, а соль мажор и ля мажор – ее субдоминанта и доминанта соответственно – наиболее родственные ей тональности.

Второй же кластер (большетерцовая сфера) – просто загадочен. Большетерцовые связи становятся характерными лишь в начале XIX века (преддверие и расцвет романтизма). Здесь следует сделать некоторое отступление от темы и пояснить, почему сфера $As - C - E$ так уверенно ассоциируется с романтизмом. Мы уже упоминали о том, что всякая

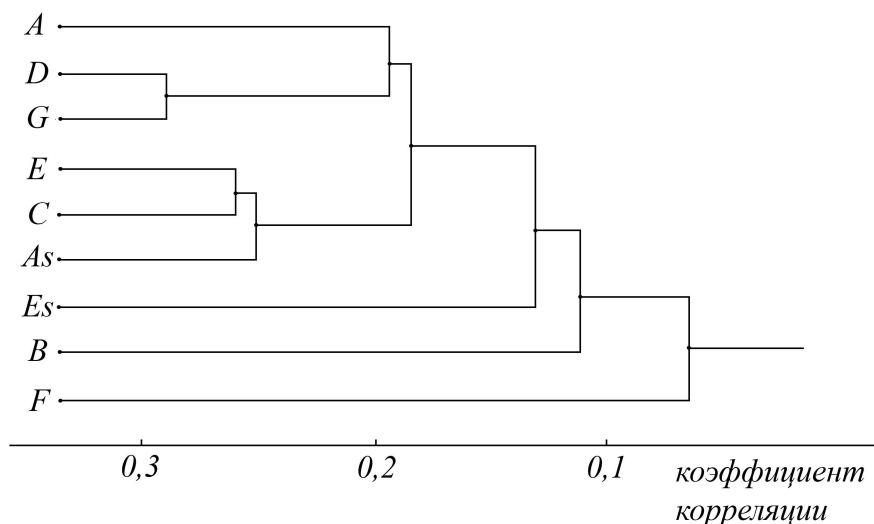


Рис. 13. Корреляции мажорных тональностей: *As* – ля-бемоль мажор, *Es* – ми-бемоль мажор, *B* – си-бемоль мажор, *F* – фа мажор, *C* – до мажор, *G* – соль мажор, *D* – ре мажор, *A* – ля мажор, *E* – ми мажор

тональность отражает свою специфическую образную и эмоциональную сферу. В частности, до мажор “характерен для светлого, солнечного, спокойного настроения” [24]. Ля-бемоль мажор – образ мечтаний, а ми мажор большинством теоретиков трактуется (вместе с си мажором) как образ смерти (вспомните финал 5-й симфонии Чайковского – апофеоз темных сил, или же скерцо его же 6-й симфонии). Суммируя эти образы, мы получаем квинтэссенцию раннего романтизма! Сравните описанную сферу с содержанием многих картин самого известного художника-романтика Германии – Каспара Давида Фридриха: развалины собора, покосившиеся кресты и надгробия, может быть, только что вырытая могила в ярком лунном свете; кряжистое дерево со сломанной верхушкой и одинокий путник, мечтатель или даже молодая парочка. И все это написано яркими, сочными красками, можно сказать, с внутренним оптимизмом. Конечно, это окарикатуренное и обобщенное описание тематики картин, написанных, кстати, очень талантливо, однако близость с тональными сферами романтической музыки налицо.

Во всяком случае не найдется ни одного сочинения Моцарта, в котором тональность второй части относительно первой или тональность побочной партии (в сонатной форме) относительно главной отстояла бы на большую терцию вверх или вниз. У В. А. Моцарта такие связи выявлены впервые, причем доказано, что они не случайны и не являются инструментальной ошибкой, а носят эволюционный характер: в ранние периоды творчества соответствующие коэффициенты корреляции близки к нулю, затем медленно растут и, наконец, претерпевают резкий скачок до значимого уровня перед началом последнего (незавершенного) творческого

периода. Наличие таких связей (внутри произведения они отсутствуют) может быть объяснено лишь “на грани реальности и подсознания” – В. А. Моцарт не выходит (как И. Гайдн) за пределы традиционных тональных соотношений между темами и частями сочинений. Ощущение свежести, красочности тональности сопоставлений выражается только в появлении сочинений в ля-бемоль мажоре и в ми мажоре (редких для композитора тональностях) именно в тех интервалах времени, в каких преимущественной тональностью была тональность до мажор. Причем проявляется это не только на годовых, но и на месячных интервалах, что вместе с замеченной выше бесспорной эволюционностью делает случайность данного явления просто невероятной.

Восемь минорных тональностей расслаиваются на несколько кластеров, два из которых тоже имеют эволюционное значение. Первый кластер (ля минор и ми минор) включает в себя минорные тональности, обычные для ранних периодов творчества Моцарта, второй (си минор, соль минор и фа минор) – характерные для “позднего” Моцарта (рис. 14). Это “дерево” отличается от “дерева” мажоров тем, что содержит одну тональность – ре минор, не связанную значимо ни с какими другими. Эту тональность большинство музыковедов считает зависимой от личных переживаний композитора.

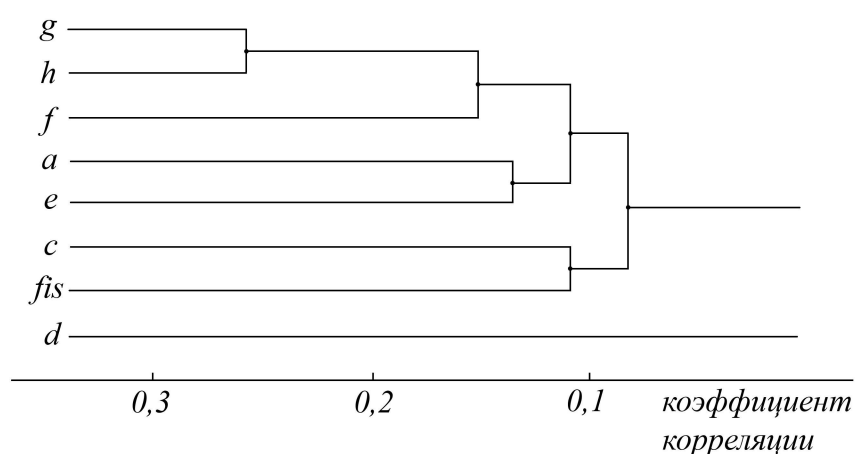


Рис. 14. Корреляции минорных тональностей: *f* – фа минор, *c* – до минор, *g* – соль минор, *d* – ре минор, *a* – ля минор, *e* – ми минор, *h* – си минор, *fis* – фа-диез минор

Немало интересной информации могут дать так называемые кросс-корреляции – численные характеристики взаимозависимости между различными группами формальных параметров, например, между мажорными тональностями и инструментами. Кросс-корреляции показывают использование каждого инструмента в сочинениях, написанных в определенной тональности. Так, кларнет среди тональностей с диезами в ключе обнаруживает наибольшее тяготение к тональности ля мажор, и это

закономерно, если учесть, что для сольных партий В. А. Моцарт предпочитал кларнет *in A* (вспомним Штадлер-квintет KV 581 и Концерт для кларнета с оркестром – KV 622), звучащий более благородно и мягко. А для духовых в целом более приемлемы тональности с бемолями (многочисленные дивертисменты и серенады в тональностях си-бемоль мажор и ми-бемоль мажор), так как в XVIII веке наиболее привычными были строи валторн *in F, B, Es* и кларнета *in B* (в ансамблях духовых). Но и среди вычисленных коэффициентов кросс-корреляций есть явный парадокс, снова заставляющий обратиться к подсознательной ассоциации. Хорошо известно, что среди произведений, написанных В.А.Моцартом для оркестрового состава с трубами и литаврами, нет ни одного сочинения в тональности ля мажор. Между тем коэффициент корреляции труба – ля мажор оказывается бóльшим, чем коэффициент корреляции труба – ре мажор, хотя известно, что ре мажор (наряду с до мажором) – одна из наиболее используемых тональностей для трубы у Моцарта. По-видимому, у композитора имелась явная ассоциация между величественным и в то же время мягким и широким ля мажором и торжественным и ярким звуком трубы, но звучание современных ему труб (они были натуральными, как горн, а не хроматическими) в ля мажоре не удовлетворяло его чисто технически (у Моцарта был необычайно тонкий слух).

Выявление внутренних связей в творчестве и доказательство их эволюционного характера позволяют вплотную подойти к решению более сложных задач – датировке, определению авторства и прогнозированию.

3.3. Дешифровка старинной музыки

Наиболее органично, без какой-либо ломки понятий, математические методы применимы к проблеме дешифровки древних нотных рукописей, записанных с помощью забытых к настоящему времени нотных систем. Задача эта во многом аналогична задачам математической лингвистики, которые (в области дешифровки) обычно классифицируются следующим образом.

1. Задача А – дешифровка неизвестного письма, которым записан текст на известном языке.
2. Задача В – дешифровка неизвестного языка, записанного известным письмом (интерпретация).
3. Задача С – дешифровка неизвестных письма и языка (неизвестный язык записан неизвестным письмом) [35].

Классическим примером успешного решения задачи А является дешифровка критского линейного Б письма молодым английским архитектором Майклом Вентрисом в 1952 г. [36]. Решалась задача типа С, так

как не было никаких убедительных сведений о том, какие языки скрывались под тремя разными видами критского письма – иероглифического, линейного А и линейного Б. Однако Вентрис блестяще доказал, что критским линейным Б записаны слова архаического греческого языка, приспособленные для передачи с помощью знаков слоговой письменности – наследия более ранних времен, когда на Крите разговаривали на другом (по-видимому, неиндоевропейском) языке.

Широко известным примером задачи В является задача дешифровки (интерпретации) этрусского языка, многочисленные, но по большей части безуспешные попытки которой предпринимались неоднократно, однако до сих пор не привели к решающему успеху. Этрусские слова записаны греческими буквами и легко читаются (если не считать того, что норм правописания практически не существовало, и поэтому в одном и том же слове авторы надписей буквы могли менять, а часть букв, особенно гласные – вообще пропускать). Ситуация осложняется тем обстоятельством, что подавляющее большинство этрусских надписей – надписи в погребениях, имеющие стандартную форму и с некоторого момента не дающие новой информации при их накоплении. Немногочисленные более длинные надписи поддаются толкованию с очень большим трудом, и само толкование остается до сего времени ненадежным. Этрусский язык состоит как бы из нескольких “пластов”, причем самый глубинный пласт скорее всего – неиндоевропейский. На него накладываются различные заимствования – из анатолийской группы, из древнегреческого, из италийских языков [37, 38]. В целом оказывается, что число родственных слов может быть весьма значительно, но непонятны степень и предмет родства.

Задачи типа С являются наиболее трудными. Те сложности, с которыми приходится столкнуться исследователю, хорошо иллюстрируются попытками дешифровать так называемый фестский диск. Он был найден в 1908 г. при раскопках древнего города Феста на острове Крит. С обеих сторон диск покрыт спирально идущей надписью, содержащей 31 группу знаков на одной стороне и 30 групп – на другой. Число различных знаков – 45, общее число знаков на обеих сторонах – 242. Диск уникален и не имеет аналогов в мировой археологической практике [39, 40, 41].

Выдающийся немецкий лингвист И. Фридрих отмечает, что “для раскрытия всякой неизвестной письменности и всякого неизвестного языка необходим хотя бы какой-нибудь опорный момент. Из ничего нельзя ничего дешифровать” [42]. К опорным моментам он относит: установление направления письма, выделение словоразделов, идентификацию типа письма, наличие идеограмм и детерминативов, наличие билингв и квазибилингв – двуязычных надписей с тождественным или близким по

смыслу текстом. Существуют два основных принципа дешифровки:

- 1). Дешифровка “извне”, т. е. путем использования внешней информации, включающей в себя: а) билингвы и квазибилингвы (необходимо, чтобы один из языков билингвы был известен); б) сравнение с текстами на родственных языках, опять же чаще всего известных (этимологический метод); в) неязыковая информация, раскрывающая те или иные смысловые элементы написанного (комбинаторный метод).
- 2). Дешифровка “изнутри”, т. е. изучение законов построения текста, соотнесенности входящих в него знаков и формулировка на этой основе выводов об их значении.

Билингвы и квазибилингвы при всей заманчивости их использования для дешифровки встречаются крайне редко, хотя именно благодаря билингве Ж. Ф. Шампольон начал успешную дешифровку древнеегипетского языка (так называемый Розеттский камень с греко-египетской надписью эпохи Птолемеев). Существует и этрусско-карфагенская билингва на золотых пластинках, найденных при раскопках Пирг, порта этрусского города Цере. Но этрусский текст состоит всего из 36 слов, что недостаточно для понимания языка.

Поэтому наиболее фундаментальным остается **этимологический метод**, однако очевидно, что для его применения всегда должны быть надежные строгие доказательства близкой генетической общности языковых основ исследуемого текста и текстов на каком-либо известном языке. Подчеркнем: близкой, ибо, например, принадлежность русского и латинского языков к индоевропейской языковой семье еще не означает, что один из них можно дешифровать посредством другого. В частности, потерпели неудачу попытки дешифровки этрусского языка с помощью древнелитовского, древнеалбанского, итальянских, хеттского, лидийского и других языков из-за отсутствия убедительных доказательств принадлежности каждого конкретного слова к определенному слою (об этой принадлежности известно лишь для слов, которые к настоящему времени более или менее переведены; таких слов около 300).

Еще более фантастические результаты дал этимологический подход для фестского диска. Какие только методы и языки не использовались профессионалами и дилетантами-любителями. Так, греческий ученый К. Ксистопулос (1948 г.) предположил, что каждый знак представляет собой слово, и попытался его расшифровать по внешнему виду, угадывая сходство с каким-либо предметом. Затем этот знак отождествляется с каким-либо словом одного из известных древних языков Восточного Средиземноморья (в данном случае – семитический), а первый слог

полученного слова принимается за фонетическое значение данного знака (так называемый акрофонический принцип). Используя собственные статистические подсчеты, Ксистопулос получил семитический текст, даже краткая выдержка из которого говорит о крайней сомнительности чтения и перевода [36]:

Всевышний – это божество, звезда могущественных тронов,
Всевышний – это нежность утешительных слов,
Всевышний – это даритель предсказаний,
Всевышний – это белок яйца...

Методом иконографических сопоставлений вместе с принципом акрофонии пользовался профессор С. Дэвис, приписав языку диска хеттолувийское происхождение. С его точки зрения, на диске записан текст религиозно-церемониального характера: “... Оттиски печатей, оттиски, я отпечатал оттиски, мои оттиски печатей, отпечатки, я отпечатал оттиски печатей, я оттиснул, я поставил печать, я поставил печать, я оттиски печатей эти, оттиски, оттиски печатей прекрасные, [и в таком же духе весь диск]” [36].

Историческую хронику об ограблении святилища прочитал на диске Джордж Хэмпль (1911 г.), донесение разведчика – профессор В. Георгиев (кстати, впоследствии оказалось, что он “читал” диск с конца, т. е. задом наперед). Однако рекорд фантазии, по-видимому, принадлежит Ф. Гордону (1931 г.). Он использовал метод, заключающийся в идеографическом толковании смысла знаков надписи. Вот фрагмент его “дешифровки”: “владыка, шагающий на крыльях по бездыханной тропе, звездокаратель, пенистая пучина вод, псорыба, каратель на ползучем цветке; владыка, каратель лошадиной шкуры (или поверхности скалы), пес, взбирающийся по тропе, пес, лапой осушающий кувшины с водой, взбирающийся по круговой тропе, иссушающий винный мех” [36].

Отдадим должное фантазии “интерпретаторов” и перейдем к обсуждению комбинаторного метода, отметив попутно, что, как было доказано впоследствии, небольшой объем надписи на диске из Феста позволяет ее интерпретировать любым наперед заданным способом.

Преимущество **комбинаторного метода** состоит в отсутствии заведомого предположения о родстве и типе исследуемого языка и о способе его записи – надпись истолковывается из контекста, что позволяет сравнительно легко понимать небольшие надписи в погребениях, на бытовых и культовых предметах. Но оторванная от грамматической формы слова информация часто отличается приблизительностью, неточностью. Например, короткое слово, написанное на этрусском боевом метательном снаряде, может означать: “убей”, “попади”, “долети”, “порази”, “будь

меток” и тому подобное. Это позволяет понять надпись в целом, но не помогает перевести точно конкретное слово и не может полностью удовлетворить специалиста по дешифровке. Тем не менее перевод многих этрусских слов стал возможен только благодаря комбинаторному методу. В отношении же фестского диска он неэффективен.

Хорошим примером дешифровки “изнутри” является ставшее уже классическим исследование диска из Феста, выполненное Г. Ипсеном и В. Порцигом летом 1924 г. [40]. Они исходили из объективного предположения о том, что в настоящее время нет никаких шансов дешифровать надпись на диске полностью. Для такого предположения имеются следующие основания:

- 1) диск является единственным памятником представленной им системы письменности;
- 2) текст диска слишком краток для проведения достаточного количества статистических исследований;
- 3) ни обстоятельства находки диска, ни сам диск как предмет не дают нам требующихся точных указаний на содержание текста;
- 4) диск относится к такому древнему периоду, что в нашем распоряжении не имеется никаких независимых данных о критских собственных именах или глоссах из иных источников, поэтому вероятность обнаружения на диске “знакомых” слов или собственных имен очень мала.

Пункты 1 и 4, по существу, отвергают этимологический метод, пункт 3 – комбинаторный. Из пункта 2 следует, что полный статистический анализ, который мог бы привести к убедительной атрибуции языка и его последующей дешифровке, невозможен из-за недостатка материала и, как следствие, недостоверности статистики. Что же делать? Ипсен и Порциг пошли по единственно верному пути – не претендуя на дешифровку, они тем не менее подвергли надпись на диске тщательному статистическому анализу на уровне возможного и сделали на основании этого только те выводы, которые достоверны. Исследование это является образцом строгого научного подхода, исключая фантасию и авантюризм; оно внесло большой вклад в изучение минойской культуры, чем все предыдущие попытки дешифровки, вместе взятые: строго доказан тип письма (слоговой с идеограммами и детерминативами), выяснено направление чтения письма, выявлены несколько корней, суффиксов, окончаний, а также префикс и детерминатив (знак “голова с перьями”, который, вероятно, поясняет, что следующее слово обозначает определенную личность; грамматически – существительное одушевленное, имя или местоимение). Выяснен также основной тип структуры предложения: в большинстве случаев предложения состоят из двух-четырех слов

ма), или знаменной и демественной нотными системами. Позднее были введены призна́ки, которые не получили широкого распространения, так как вскоре вслед за этим начался переход на более удобный западноевропейский способ записи – линейное нотное письмо.



Рис. 16. Образец знаменного письма перед церковным собором 1666-7 года

Предпринимавшиеся неоднократно (с дореволюционных времен) попытки расшифровки крюкового письма (С. В. Смоленский, А. В. Преображенский, В. М. Беляев, М. М. Иванов и другие исследователи) давали недостаточные или неудовлетворительные результаты. Наиболее серьезные исследования проблемы интерпретации были проведены советским

музыковедом М. В. Бражниковым. Им были интерпретированы рукописи XVI–XVII веков с пометами. Однако беспометные рукописи аналогичным способом интерпретировать не удалось. Бражников писал: «Выбирая “темные пятна” и ставя их одно рядом с другим, придется прийти к заключению, что эти пятна покрывают, сливаясь вместе, всю историю знаменного пения в России, начиная с древнейших времен и кончая временем его практической смерти – XVIII веком» [44].

Между тем правильная интерпретация крюкового письма могла бы стать основой для понимания принципов нотного письма кондакарных рукописей и, впоследствии, греческих первоисточников. Принимая во внимание тот факт, что западноевропейские рукописи расшифрованы, прочтение греческих гимнов явилось бы, в первом приближении, завершением изучения основ истории эволюции европейской музыки. На фоне современных тенденций исторической науки к выявлению глубоких закономерностей развития устранение “темных пятен” представляется весьма актуальной задачей.

Заметим, что поставленная задача осложняется тем, что имеющиеся в распоряжении исследователей двознаменники не являются полноценными билингвами, так как в разных двознаменниках один и тот же знак трактуется по-разному. Это может означать только то, что значение каждого знака зависит от окружения, т. е. от того, какие знаки ему предшествуют. Иными словами, “перевод” знака имеет не абсолютный, а контекстный характер. Неудачи интерпретации при помощи традиционных методов (в частности, из-за полного отсутствия критериев и эталонов – “точных билингв”) обусловили поиск новых путей решения проблемы. Один из возможных путей – математический метод обработки информации применительно к нотному тексту, рассматриваемому в качестве некоторой знаковой системы.

Как правило, при дешифровке могут быть использованы два существенно разных вида информации – информация формальная, полученная на основе прямого анализа текста, и информация “априорная”, определяемая косвенными сведениями о содержании как всего текста в целом, так и составляющих его единиц (подобная информация является ключевой при комбинаторном анализе текста). И традиционные, и математические методы используют весь объем информации в качестве исходного материала для дешифровки. Принципиальным различием их является то, что основой традиционных методов служит “априорная” информация, тогда как математические методы обусловлены формальным анализом с последующим согласованием выводов с информацией “априорных” источников. Преимуществом такого подхода является исключение субъективного фактора (в той или иной степени присутствующего

в любой “априорной” информации) и возможность строгой математической проверки любой гипотезы.

Проблема интерпретации знаменной нотной системы письма остается наиболее острой и загадочной проблемой истории русской музыки. Применение математических методов может внести решающий вклад в исследование ряда вопросов, непосредственно связанных с интерпретацией:

1. Выявление принципа соответствия помет крюкам и значение всех помет и всех знамен.
2. Характеристика системы древнерусских гласов (своеобразных звукорядов), т.е. описание попевок, характерных для каждого гласа.
3. Установление основных принципов эволюции крюкового письма (знаки изменялись по форме и, возможно, по содержанию, забывались одни и появлялись другие).

Итак, с чего же начать? Если уж считать способ записи музыкального произведения знаковой системой, то необходимо классифицировать задачу и метод ее решения с позиций математической лингвистики. По-видимому, дешифровку знаменного нотного письма можно отнести к задачам типа А (известный язык, записанный неизвестным письмом), однако следует отметить некоторые специфические особенности.

Во-первых, под знанием “музыкального языка” подразумевается наличие информации, позволяющей определить: а) звукоряд и звуковысотные ограничения; б) основные принципы “словообразования” – построения мелодии, к которым относятся, например, плавность голосоведения и акценты на опорных тонах звукоряда; в) наличие строгой ритмической (и звуковысотной) связи музыкального и литературного текстов (причем литературный текст в дешифровке не нуждается). Однако следует помнить, что отсутствие смыслового элемента музыкальных слов очень осложняет интерпретацию и выработку критериев.

Во-вторых, в знаменном нотном письме отсутствуют какие-либо специальные знаки, разделяющие музыкальные фразы; имеются лишь неточные билингвы и квазибилингвы – двознаменники и азбуки.

В-третьих, детерминативы – пометы (делящиеся на степенные и указательные) имеются лишь в позднейших рукописях, причем значение некоторых из них неясно. Однако известно, что репертуар знамен может быть подразделен на четыре группы: тоны, характеры, способы исполнения и вспомогательные знаки. Последние три группы знаков, по-видимому, можно также рассматривать как детерминативы.

На ранних этапах исследования применение этимологического метода вряд ли оправдано, так как крюковая система нотной записи может быть

в известной степени родственна лишь кондакарной и греческой, которые изучены хуже знаменной. Близкое родство западноевропейской невменной (предшествовавшей современному нотному письму; невмы представляли собой специальные значки для записи вокальной музыки) и русской знаменной систем записи недостоверно, ввиду чего материалы по интерпретации западноевропейских рукописей могут использоваться лишь для комбинаторного анализа с учетом следующих факторов:

- а) общности происхождения – из греческих гимнических первоисточников;
- б) общности тематики – христианская культовая (но следует учитывать и различия – в догматике, в словообразовании, в принципах построения фраз литературного текста);
- в) общности основных принципов строения звукорядов и мелодии.

Возможность применения комбинаторного метода связывается также с существованием своеобразных билингв – двознаменников, в которых одна и та же мелодия записана двумя способами – знаменным письмом и квадратной нотой в цефнутном ключе на линейном стане. Однако, как уже указывалось ранее, разные двознаменники дают противоречивое толкование смысла знамен (возможно, это связано с тем, что в крюковом письме значение каждого знака зависит от контекста, т. е. от окружения, тогда как линейная нотация заведомо предполагает некоторый нуль-пункт, в соответствии с которым легко определяется абсолютная высота тона каждого знака). Мало могут помочь и азбуки, в которых тоже встречаются противоречия, и к тому же отсутствуют указания о дешифровке элементарных, основополагающих понятий. По-видимому, основы, с точки зрения составителей азбук, были понятиями, сами собой разумеющимися.

Поэтому приходится признать, что информация, которая может быть получена комбинаторным методом, явно недостаточна и в существенной своей части – противоречива. Остается лишь один путь исследования интересующей нас знаковой системы – статистика. Что же представляет собой эта знаковая система?

В знаменном нотном письме существует несколько десятков знаков, имеющих свое самостоятельное значение и соответствующих одному или нескольким звукам. Встречаются комбинации, в которых составляющие их знамена теряют свое значение. Такие комбинации носят название фит и лиц, они соответствуют целым мелодическим строкам, а общее их количество составляет несколько сотен.

Знамена показывают движение мелодии, не фиксируя высоту звука, но, по всей видимости, определяют его длительность. О высоте свиде-

тельствуют соотношения с предыдущим знаком, специальные обозначения и степенные пометы, а о длительности – и некоторые указательные пометы. Следует подчеркнуть, что пометы сами по себе не изменяют мелодии, так как они были введены лишь для “подсказки” певчим. Иными словами, беспометная рукопись должна читаться так же, как и рукопись с пометами, если она записана тем же типом письма и приблизительно в то же время.

Нотных рукописей, записанных крюковым письмом, известно около десяти тысяч. Это обстоятельство позволяет рассчитывать на тщательное и всестороннее изучение “внутренней логики” знаковой системы. В качестве предварительной обработки необходимо провести анализ частотности и сочетаемости знаков. Частотным составом знаков могут различаться произведения: а) разных гласов, б) разных веков, в) разных жанров, г) разного характера исполнения. Различное количество повторений знамен по гласам отражает зависимость употребления знака от гласа, в результате чего можно выделить знаки, свойственные данному гласу. Если частотность знака для разных произведений одного гласа является устойчивой величиной, этот знак может оказаться характерным для данного гласа в целом, т.е. он много раз входит в систему попевок гласа, например, в специфический кадансовый оборот.

Кроме того, наиболее частотные знаки должны быть и наиболее простыми. Чем чаще знак встречается, тем меньше информации он несет. Однако обратное неверно – знак, встречающийся редко, не обязательно сложный. Может быть, он просто выходит из употребления в период создания рукописи или, наоборот, только недавно появился; может быть и такая ситуация, что знак редкий в силу нетрадиционности своего значения, т. е. данная попевка в принципе нетипична для музыкального стиля исследуемой эпохи (периода, жанра).

Помимо частоты, интерес представляет сочетаемость знаков. Она так же, как и частота, может зависеть от века, гласа и вида произведения, и помогает выделить характерные для данного текста сочетания звуков. Известно, что глас представляет собой фиксированный звукоряд с присущей ему специфической системой попевок – устойчивых мелодических оборотов. Таким образом, выявляя сочетания, наиболее часто повторяющиеся в мелодиях данного гласа, можно приблизительно определить попевки этого гласа. Самые частотные обороты относятся, по всей вероятности, к концовкам и полуконцовкам.

Для обоснования предложенных классификаций, а также для разработки рабочих гипотез целесообразно применить корреляционный анализ. Все полученные корреляционные матрицы можно разбить на две категории:

- 1) коэффициенты корреляции не зависят или слабо зависят от выбранной знаковой системы; поэтому связи внутри данного набора признаков обусловлены особенностями музыкальной системы (например, системы ладов или гласов);
- 2) коэффициенты корреляции сильно зависят от выбранной знаковой системы; поэтому связи внутри данного набора признаков обусловлены особенностями системы записи (например, крюковой или линейной).

Информация, полученная из первой категории матриц, помогает лучше понять музыкальный язык, который известен лишь в описательных терминах (формально сформулированы только некоторые запреты), а информация, полученная из второй, – выявить основные правила грамматики и синтаксиса знаковой системы [45].

Пробный статистический анализ древнерусских музыкальных рукописей был выполнен на материале сборника стихир Федора Крестьянина (XVI век) [44, 45]. Полученные данные еще не интерпретированы полностью, но ряд интересных выводов уже можно сделать. Во-первых, оказалось, что в XVI веке соответствия названий крюков по принадлежности к какому-либо согласию их функциональным значениям по отношению к этому согласию становятся далеко не однозначными. У многих крюков выделяется не один, а два или даже три максимума повторения различных помет, хотя определенные закономерности сохраняются: так, знаку, называемому статья простая, присущи простое и мрачное согласия, статье мрачной – мрачное и светлое, статье светлой – только светлое. Выводы о функционировании и роли знамен в звукоряде (согласиях) дают представление о системе согласий в целом и позволяют провести предварительную формальную классификацию знаков.

Во-вторых, “дерево”, построенное на основе корреляционных матриц знамен, обнаруживает большую взаимосвязь знаков со схожим начертанием между собой. Напрашивается гипотеза о том, что знаки, близкие по форме, занимают и сходное положение в системе знаменного роспева, хотя, вероятно, не всегда. В один кластер выделяются знамена, обозначающие (согласно азбукам) один звук каждое.

В-третьих, “дерево” корреляции гласов дало уже на первом этапе математического исследования достаточное количество формальной информации для отбраковки ложных гипотез. Так, если считать, что древнерусские гласы соответствуют византийским ладам, из которых четыре лада являлись самостоятельными, а четыре следующие – производными, то первый глас должен быть близок пятому, второй – шестому и т. д. Однако корреляционный анализ выявляет близость пятого гласа восьмому, первого – шестому, третьего и четвертого – пятому с восьмым, а вто-

рой и седьмой гласы оказываются наиболее своеобразными, непохожими на остальные. Таким образом, гипотеза о производности древнерусских гласов статистически не подтверждается.

Объем выполненных исследований пока невелик, но уже сейчас очевидна эффективность “внутреннего” метода в тех задачах, где привнесение субъективного фактора в самом начале исследования может привести к ошибочному решению всей проблемы в целом. Очевидна и перспективность применения математических методов, обеспечивающих объективный учет всей имеющейся “внутренней” информации, строгую оценку достоверности результата и получение решения поставленной задачи в формализованном виде. И можно надеяться, что статистический подход позволит создать азбуку, в которой крюки будут надежно интерпретированы в виде всем понятных нотных знаков, а не словесных толкований, которые стремятся передать эмоциональное значение знамени, описательно размыты и неясны из-за незнания нами нигде не объясняемой терминологии типа “воздёрни” или “тряхни и стой”, не лишенной интереса для дешифровщика.

3.4. Проблема авторства, восстановление утраченной части сочинения

Нередко можно слышать такое суждение: “А какая разница . . . кто и когда написал это произведение? Это хорошая музыка, ее можно играть, и публике она нравится”. Странно, что такого мнения придерживаются и некоторые хорошие профессионалы-исполнители. Можно утверждать, что такое мнение – не артиста, а заурядного ремесленника. Ибо какой же артист может исполнять сочинение в отрыве от личности автора, от времени и среды его обитания? Каждая эпоха, каждый стиль, каждая личность творца накладывает на исполнение свои требования (и достаточно жесткие). Игнорирование этих требований равносильно отказу от бережного сохранения многовековой музыкальной культуры. И без того множество рукописей безвозвратно утеряно, поэтому трудно предполагать, что в будущем нас ожидают сенсационные находки произведений И. С. Баха, В. А. Моцарта, Ф. Шуберта, считающихся пропавшими. Наконец, любой подлинник – это документ истории, содержащий неизмеримо больше, чем само по себе музыкальное произведение. Это и отношения композитора с окружающими его людьми – заказчиками, переписчиками, издателями: это и уровень известности, престижа автора в то время; это и социальные, исторические, географические связи, критерий уровня развития музыкальной науки, практики – и все это подлинник, будь он автографом, копией или изданием, близким по времени к появ-

лению сочинения.

Но не только равнодушие препятствует стремлению к четкой атрибуции памятников музыкального творчества. Время от времени приходится сталкиваться с опасностью более серьезной, чем простое непонимание – с подделкой, которая бывает двух “сортов” – фальсификация и мистификация. Разница между этими на первый взгляд схожими типами музыкальной “продукции” принципиальная: коренное различие в том, с какой целью совершается подделка, а все различия во внешних признаках – не что иное, как следствие коренного. Фальсификатор прежде всего ищет материальную выгоду. Поэтому он стремится тиражировать и продавать ничтожные музыкальные поделки под именем, гарантирующим спрос и интерес публики. В основном фальсификациями “прославились” владельцы фирм, издающих ноты, стремящиеся во что бы то ни стало обойти конкурента, предложить любителям как можно больше сочинений модного в это время композитора, а если их не хватает или не подходит жанр, то можно использовать и произведения других, забытых авторов, лишь бы они подходили по стилю, или аранжировать (изуродовать) сочинения модного автора под вкус публики. Жертвами фальсификатора становятся, как правило, широкие круги не слишком искусственных любителей.

Мистификатора материальный успех волнует относительно мало. Ему нужна известность, реклама – известность собственная (как композитора, когда подделка будет разоблачена) или популяризация забытого композитора прошлого (тогда мистификатор выступает в качестве “первооткрывателя”). Поэтому мистификацией публики, а еще больше – критиков и специалистов – занимались в основном выдающиеся исполнители, которых не признавали в качестве композиторов, либо которым надоедало играть одни и тот же классический репертуар, и они стремились привлечь внимание публики к забытым композиторам (предлагая сначала блестящую подделку “в стиле . . .”). Жертвами мистификатора становятся высокообразованные ценители музыки, видные музыковеды, критики.

Корни плагиата и подделок лежат в глубоком прошлом. По-видимому, в античности и средневековье редкий автор не действовал по принципу “красть не грешно”. В условиях практического отсутствия какой-либо возможности тиражирования трудов, кроме кропотливой переписки, многие сочинители были только рады, что их цитируют (пусть даже без ссылки на первоисточник); так или иначе, но именно их идеи распространялись в массах. Вскоре цитирование стало своеобразным знаком уважения и признания примата. Например, И. С. Бах переработал 6 различных инструментальных концертов А. Вивальди в сольные кла-

вирные, и его же концерт для четырех скрипок с оркестром – в концерт для четырех клавиров с оркестром. Аналогично поступали и другие композиторы.

Массовое печатание нот изменило ситуацию – издательства приобрели права собственности на музыкальные сочинения, плагиат стал преследоваться по закону, и весьма немногим композиторам удавалось, как известному своей сельской смекалкой Йозефу Гайдну, продать свои произведения двум издательствам одновременно.

Тем больше было простора для произвола издателей. Они поняли, что имена некоторых прославленных композиторов имеют особую притягательную силу, и начали, за недостатком подлинников, фабриковать подделки. Первыми жертвами их предприимчивости стали великие композиторы рубежа XVIII–XIX веков, чьи наследия отличались особой запутанностью из-за ряда причин – В. А. Моцарт, Л. Бетховен и Ф. Шуберт. И одна из них, общая для троих – житейская непрактичность, доходившая у Ф. Шуберта до полной беспомощности перед всемогуществом издателей.

Сразу после смерти Моцарта издатели развили бурную деятельность – в период с 1792 по 1803 г. рынок буквально наводняется фальшивыми сочинениями с его именем. Использовались подлинные произведения композитора с подложными текстами, переложённые для другого инструментального состава, с произвольно перетасованными частями, поэтому современникам событий случалось видеть в продаже трехчастный дуэт, составленный из фрагментов трех разных сочинений. В качестве примера можно указать 7 кантат, выпущенных издательством Зимрока (Бонн) и состоящих из фрагментов месс, литаний и вечере с подложным текстом, а также 43 инструментальных дуэта, 6 трио, 20 квартетов и 8 квинтетов, сфабрикованных из скрипичных сонат и клавирных ансамблей и выпущенных фирмой Оффенбах – Жан Андрэ. Для убедительности подделки снабдили номерами опусов: 32, 33, 39, 64–81, 108, 109, и позже “сочинения” были перепечатаны под этими же номерами крупнейшими издательствами Европы – Плейель (Париж), Зимрок (Бонн), Артариа (Вена), Брайткопф и Гертель (Лейпциг) и др.

В дальнейшем издатели, не считаясь с мнением общественности и с протестами специалистов, стали фабриковать произведения разных выдающихся композиторов. Известен сборник фортепианных пьес “Память о Людвиге ван Бетховене: шесть вальсов и траурный марш”, изданный впервые в 1828 г. солидной фирмой “Б. Шотт-сыновья” (Майнц) [46]. Беглое знакомство со сборником позволяет удостовериться в том, что ни один из помещённых в него вальсов Бетховену не принадлежит. Более того, первое место в сборнике занимает “Траурный вальс” Ф. Шуберта,

названный “Томлением”! Не следует удивляться столь банальным названиям – они тоже придуманы издателями. Друг, секретарь и биограф Бетховена Антон Шиндлер еще в сентябре 1827 г. написал открытое письмо в издательство “Б. Шотт–сыновья”, протестуя против первого издания “Траурного вальса” под именем Л. Бетховена. Трудно придумать более издевательский ответ, чем выпуск очередной подделки, которая к тому же многократно переиздавалась другими издателями вплоть до 1868 г.

Парижское издательство Ришо не решилось, вероятно, пользоваться для подделки известными сочинениями. Оно в 1835 г. выпустило под именем Ф. Шуберта песню “Прости” со словами на французском языке, которая оказалась принадлежащей перу малоизвестного рижского композитора Августа Генриха Вайрауха (1824 г.); подложными были и слова – в оригинале песня, написанная на немецкий текст Карла Готтлоба Ветцеля, называлась “К востоку”. Любопытно, что в наше время фирма “Мелодия” выпустила диск с этой песней, где она опять-таки именуется песней Ф. Шуберта “Прости” (вдобавок сделано “открытие” – оказывается, текст принадлежит близкому другу Шуберта Ф. Шоберу, писавшему стихи . . . на французском языке?).

На другом диске “Мелодии” можно увидеть надпись “Ф. Шуберт. Адажио и Аллегретто грациозо”. Здесь мы имеем дело с мистификацией. Автором пьесы, по всей видимости, является испанский виолончелист и композитор Гаспар Кассадо. Это вполне в духе проделки Фрица Крейсlera, который написал в начале века серию “Классические манускрипты” от лица тогда полузабытых композиторов – Гаэтано Пуньяни, Карла Диттерсдорфа, Луи Куперена и др., и сохранял тайну этих сочинений целых 30 лет, чем глубоко шокировал специалистов, в частности, известного английского музыковеда и критика Э. Ньюмена, не сумевшего распознать мистификацию. Однако Крейсlera в этом винить трудно – изданию этих пьес было предпослано примечание на трех языках, содержащее прозрачный намек: “Оригинальные рукописи, публикуемые впервые и послужившие г-ну Крейслеру для транскрипции, являются его собственностью. Г-н Крейслер обработал их настолько свободно, что, в сущности, они представляют самостоятельные произведения” [47].

По стопам Ф. Крейсlera пошел было и французский скрипач М. Казадезюс, пытавшийся выдать свой скрипичный концерт за сочинение Моцарта, посвященное французской принцессе Аделаиде (в связи с чем и концерт известен под этим названием), но в данном случае подделка была разоблачена без особых усилий. Его информация противоречила известным биографическим фактам. Особенно подвело фальсификатора его сообщение о рукописном посвящении, якобы имеющемся на ману-

скрипте. Все серьезные исследователи сразу же заподозрили подлог – в то время принято было испрашивать разрешение на посвящение, а сам текст посвящения воспроизводился на **печатном** экземпляре. Посвящение же на рукописи означало панибратские отношения юного Моцарта и французской принцессы, чего, естественно, быть не могло. . .

Но существуют ли общие методы распознавания подделок, которые не требовали бы от исследователя уникальных знаний и способностей? Если “древний манускрипт” написан на бумаге XIX века чернилами “Радуга” производства Ленбытхим, то такая грубая подделка даже не заслуживает внимания специалиста. Для выявления подобных (но более уточненных) анахронизмов разработаны специальные физические методы, похожие на методы, применяемые в криминалистике [48]. А как быть, если бумага, чернила (или печать) и другие атрибуты рукописи (или издания) соответствуют рассматриваемому времени? Например, среди симфоний, приписываемых Й. Гайдну, имеется сомнительная симфония (под номером С9), которая в разные годы издателями публиковалась как сочинение Гольцбауэра (№ 6), Л. А. Гофмана (№ 8) и Иоганна Христиана Баха. Подобных симфоний в каталоге, составленном Антони ван Хобокеном, насчитывается 148. И это кроме 108, для которых авторство Й. Гайдна в основном установлено.

В дополнении к каталогу Кёхеля помещено множество сочинений, которые ранее приписывались В. А. Моцарту, а ныне с полным основанием могут считаться анонимными. Например, в современном издании каталога Гавот, Аллегро и Траурный марш для клавира в четыре руки KV Anh.284g, Трио для клавира, скрипки и виолончели KV Anh.284h, Рондо для клавира KV Anh.284i и Менуэт для оркестра KV Anh.293a приписываются уже Л. Бетховену. Обращение к каталогу творчества Л. Бетховена не рассеивает сомнений. Действительно, эти сочинения там имеются, но тоже в дополнении и с припиской о том, что Бетховен к их появлению никакого отношения не имеет. Никаких других гипотез об авторе в этом каталоге не выдвигается, а след теряется окончательно [32].

Немало сложностей доставляет и “синдром автографа”. Исследователь, видя перед собой автограф, например В. А. Моцарта, впадает в своеобразный гипноз; ему трудно даже предположить, что попавшее в его руки произведение (если оно не было известно ранее) сочинено не Моцартом, а лишь переписано им. Именно так попали в полное собрание сочинений Моцарта 2-я, 3-я и 37-я симфонии, причем авторство 2-й до сих пор не выяснено, однако установлено, что это произведение не принадлежит Моцарту, а подлинными авторами 3-й и 37-й являются К. Ф. Абель и Михаэль Гайдн соответственно, хотя 20 тактов вступления к симфонии М. Гайдна – все-таки сочинение Моцарта.

В 1918 году мир облетела весть о том, что в Целле ам Зее (Австрия) при разборке старых книг и нот на чердаке одной виллы найдено неизвестное ранее произведение Шуберта – квартет для флейты, гитары, альты и баса (виолончели). К тетради приложена пожелтевшая записка с короткой фразой: “Это написано самим Францем!”. А начале рукописи была обозначена дата – 26 февраля 1814 года. Рукопись исследовал известный мюнхенский композитор Генрих Каспар Шмид. Он подтвердил, что рукопись написана действительно рукой самого Шуберта, и ни на мгновение не усомнился в том, что и музыка принадлежит Шуберту. Всюду в музыке Шмид находил типично шубертовское и даже характерное не только для раннего Шуберта, но для всего его творчества в целом. Так, он заявил, что третья (медленная) часть квартета “выдает не только подлинного, но и всего Шуберта”. И что же? Оказалось, что гитарный квартет представляет собой обработку “Ноктюрна” для флейты, альты и гитары венского композитора Венцеля (Венцеслава Томаша) Матйека. Шуберт лишь добавил партию виолончели и дополнительно написал второе трио менуэта, которое представляет собой его собственное сочинение. “Ноктюрн” Матйеки бал опубликован венским издательством Артариа в 1807 году. Кстати, некоторые пометки на рукописи свидетельствовали о том, что обрабатывается уже изданное сочинение. Однако хорошо известно, что первым отдельным изданием Шуберта вышла песня “Лесной царь”, написанная в 1815 году и помеченный при издании как ор. 1 [46].

Для исследования и здесь не обойтись без математики. Используем выявленные закономерности – биоритмику творческого процесса и его “внутреннюю логику”. Введем **генеральный массив**, строки которого соответствуют всем индивидуально характеризваемым частям всех (известных) сочинений, написанных композитором, а столбцы – индивидуальной характеристике каждой части, т. е. набору формальных параметров (дата, место сочинения, тональность, размер, число тактов, нормировка, инструментовка, жанр, форма, темп и т. д.). Например, генеральный массив творчества В. А. Моцарта содержит около 2660 строк при 30 столбцах. Необходимость фиксации каждой части диктуется различием формальных параметров между частями сонаты или симфонии (например, в тональности, размере и форме) и, тем более, между номерами оперы.

Если построенный генеральный массив содержит информацию о заведомо большей части творческого наследия, и датировка большинства произведений точна и достоверна, обработка его на ЭВМ позволяет выявить “внутреннюю логику” творчества, причем тем полнее, чем больше размерность массива. Предположим, что найдено ранее неизвестное со-

чинение, приписываемое тому же композитору. Тогда, если эта гипотеза справедлива, оно должно “вписаться” в генеральный массив, не нарушая заложенных в нем закономерностей эволюции творчества, иными словами, не противореча “внутренней логике”. На основе этих рассуждений может быть разработана методика для датировки, определения (проверки) авторства и прогнозирования утерянных сочинений. Заметим, что генеральный массив в такой интерпретации представляет собой **формальную знаковую систему (ФЗС)**, в каком-то смысле аналогичную рассмотренной в предыдущем параграфе. Особенно важно то, что мы полностью абстрагируемся от априорных предположений, базируясь только на формально установленных параметрах.

1. Датировка. Для решения задачи в генеральный массив вводится еще одна “переменная” (“блуждающая”) строка, которая содержит все формальные параметры проверяемого сочинения, за исключением даты (поскольку она не установлена). Программа, введенная в ЭВМ, должна так подобрать место для “переменной” строки, чтобы сделать минимальным отклонение от закономерностей, выявленных в отсутствие дополнительной строки.

2. Определение, проверка авторства. Здесь может быть применен тот же метод, однако необходимо с самого начала зафиксировать максимальную величину отклонения. Если вычисленное отклонение не превышает максимальное, то исследуемое произведение принадлежит данному автору с достоверностью, определяемой значением отклонения. Одновременно определяется и принадлежность этого произведения тому или иному периоду творчества.

3. Прогнозирование утерянных сочинений. Творческое наследие крупных композиторов прошлого в большинстве случаев дошло до нашего времени в неполном виде, причем иногда неизвестно даже, какое именно сочинение утеряно, что именно написал композитор в тот или иной момент своей жизни. Это характерно для тех периодов творчества, о которых не сохранилось каких-либо документов, писем или сохранились лишь общие фразы “усердно работал”, “работал с большим прилежанием, чем ранее” и т. п. Подчеркнем – речь может идти только о восстановлении формальных параметров утерянного сочинения, в первую очередь – жанра, объема (ориентировочного числа тактов) и, возможно, инструментовки, и решение этой задачи может использоваться исключительно для сужения круга поисков утерянного сочинения. В данном случае нет необходимости прибегать к “переменной” строке, так как дата или узкий диапазон дат известны. Получается обычная задача наиболее вероятного заполнения пустых клеток таблицы, для решения которой существуют определенные алгоритмы.

Приведенные три задачи не исчерпывают всего многообразия проблем, решаемых с помощью обработки генерального массива на ЭВМ. Однако заметим, что подобные методы не заменяют физико-химического и палеографического анализов рукописей и теоретико-музыкальных исследований спорных произведений.

Можно ли все-таки восстановить утерянное произведение или хотя бы его часть? Ответ на этот вопрос в подавляющем большинстве случаев отрицательный. Если сочинение утеряно полностью, либо нам известна лишь меньшая его часть, восстановление невозможно. Исключением являются только те произведения, которые представляют собой канон (и тема его известна).

Естественно, чем стиль изложения более строгий, чем жестче правила, которыми руководствовался композитор, тем больше вероятности, что работа по восстановлению сочинения будет иметь смысл. Например, вполне реальна реконструкция пяти- или шестиголосных сочинений строгого стиля, в которых по какой-то причине утеряны один или два голоса. История знает много подобных примеров – мотеты Карло Дзезуальдо ди Венозы, ряд русских партесных (многоголосных) концертов и т. д. Известен и уникальный пример такого рода – “Адажио” Томазо Альбини восстановлено по одному только басовому голосу и записано на диск фирмой “Мелодия”.

Реконструкция более поздних сочинений наталкивается, естественно, на более серьезные трудности. Хорошо известно, что Реквием В. А. Моцарта остался неоконченным, и был дописан учеником композитора Францем Ксавером Зюсмайром по просьбе вдовы Моцарта Констанцы. Однако мало кто обращает внимание на довольно принципиальные шероховатости и нарушения формы, которые никак не могли быть допущены самим Моцартом, а следовательно, являются результатом реконструкции, хотя Зюсмайр был, по-видимому, единственным человеком, знавшим авторский замысел в целом: Моцарт проигрывал ему на клавире все сочиненные (но не записанные) фрагменты. И уж совсем неудовлетворительной является “реконструкция” мессы до минор (1783 г.), выполненная в 1901 г. Алоизом Шмиттом, который, стремясь учесть литургические требования, использовал для Credo и Agnus Dei части из юношеской мессы Моцарта, а оставшиеся в набросках фрагменты “дополнил” в соответствии со вкусами своего времени. . .

Почти невозможно восстановить неоконченные сочинения Ф. Шуберта. Даже такой крупный композитор, как Иоганнес Брамс, отказался от мысли завершить шубертовскую симфонию ми мажор, для которой имеется полный клавирный эскиз. Тем более бесперспективной представляется реконструкция “Неоконченной” симфонии: возможно было бы вос-

становить скерцо, так как есть 20 тактов партитуры и клавирный эскиз, но ведь скерцо без финала не решает задачу, а для финала не известно ни одной ноты. . . Однако в последнее время ситуация существенно изменилась. Криста Лэндон в ноябре 1982 г. закончила реконструкцию седьмой симфонии e-moll/E-dur DV 729, Реконструированы были также три части 10-й симфонии D-dur DV 936A.

Существуют, однако, примеры плодотворных реконструкций, имеющих непреходящую художественную ценность. Это прежде всего дописанная Николаем Андреевичем Римским-Корсаковым и Александром Константиновичем Глазуновым опера Александра Порфирьевича Бородина “Князь Игорь”. Успех реконструкции во многом объясняется творческой близостью этих композиторов, детальным знакомством с замыслом и эскизами, глубоким пониманием тонкостей стиля Бородина и, конечно, феноменальной музыкальной памятью Глазунова.

Применение математических методов открывает новые возможности восстановления частично утраченных музыкальных произведений. Ресурсы современных ЭВМ позволяют быстро и эффективно работать с ФЗС, перебрать все возможные (с учетом правил, соответствующих данному стилю) варианты и выбрать среди них наиболее предпочтительный, отражающий “внутреннюю логику” автора.

3.5. Проблема нуля-пункта временной оси

Любая историческая наука призвана описывать исторические факты и, как минимум, устанавливать их последовательность во времени, т.е. “выстраивать” события на временной оси. Если исследование касается локальных событий, то достаточно указать, какое событие произошло раньше, а какое – позже, предполагая, что исходная точка отсчета известна. К примеру, “выстраивание” событий биографии композитора начинается с момента его рождения, который считается известным (в ряде случаев – из нескольких независимых источников).

Гораздо сложнее описывать глобальный ход истории, особенно если исследование касается глубокой древности. Здесь нет абсолютно надежных точек отсчета, что порождает множественность трактовок, а в ряде случаев – фальсификации и авантюрные теории. Так, историком Н. А. Морозовым (1854-1946) и академиком А. Т. Фоменко была выдвинута гипотеза (и, казалось бы, подтвержденная многочисленными фактами) о том, что временную шкалу следует радикально пересмотреть. Приведем лишь несколько параллелей, которые, по версии авторов гипотезы, представляют собой различные описания одного и того же события [49]:

– 2800–2700 годы до н. э. – Египет. Строительство самых больших

- пирамид Хуфу (Хеопса) и Хафры (Хефрена) = 395–518 годы н. э., эпоха строительства пирамид. Пирамида Хуфу посвящена Диоклетиану, а пирамида Хафры – Арию;
- 1792–1750 годы до н. э. – Вавилон. Правление царя Хаммурапи. Составление законов = 243–305 годы н. э., время правления Диоклетиана;
- 1490–1436 годы до н. э. – Египет. Тутмос III, совершивший 17 завоевательных походов в Азию и достигший четвертого порога Нила = 285–337 годы н. э., император Константин I, которому соответствует Тутмос III;
- X век до н. э. – Древнееврейское царство. Правление царей Давида и Соломона, строительство храма в Иерусалиме = 284–305 годы н. э., Давид = Диоклетиан, 285–337 годы н. э., Соломон = Константин I, 537 г. н. э., строительство храма св. Софии в Царьграде;
- 754–753 годы до н. э. – основание Рима = 284 год н. э., эра Диоклетиана – то же, что эра “от основания города”, Рим = Константинополь.

Иисус Христос, по этой версии, отождествляется с императором Юлианом (время правления 361–363 годы н. э.), в свою очередь Юлиан = Рамзес Великий (мумия до сих пор экспонируется в каирском музее).

Таким образом, по мнению авторов гипотезы, и Древний Египет, и Иудея, и Древняя Греция, и Рим существовали **в одно и то же время**, а традиционная историческая литература под этими именами описывает одни и те же события, “тиражируя” их и приписывая различным (несуществующим) историческим эпохам.

Сама по себе гипотеза не лишена остроумия, ее авторы “высветили” ряд интересных фактов и сопоставлений, однако выводы ее довольно фантастичны. С учетом громких имен авторов она довольно быстро нашла ряд сторонников, и обнаружилось, что убедительное опровержение ее – довольно сложная задача, несмотря на то, что подавляющая часть видных ученых эту гипотезу категорически отвергают. Дело в том, что, как ни странно, до последнего времени не было определено ни одного безусловно надежного нуль-пункта для описания глобальных периодов истории – радиоуглеродный метод дает далеко не бесспорные результаты, а остальные методы еще менее точны и надежны.

Ключ к разгадке находился совсем рядом, а для людей, посещавших Египет – буквально прямо перед глазами. Надо сказать, что с глубокой древности человечество волновала тайна пирамид, и вплоть до настоящего времени на некоторые вопросы так и не было приемлемого ответа. Например:

- Почему ни в одной из великих пирамид не было найдено мумии фараона, для которого она создавалась?
- Почему из трех великих пирамид в Гизе две сравнимы по величине, а третья кажется совсем маленькой? Неужели фараон Менкаура (Микерин) не имел достаточно ресурсов, чтобы построить достойную пирамиду наравне с Хуфу (Хеопсом) и Хафрой (Хефреном)?
- Почему третья пирамида не только меньше, но и стоит как бы “на отшибе” от юго-западной оси (рис. 17)?
- Наконец, зачем от каждой “погребальной камеры” (и царя, и царицы) к стене под углом проложены “вентиляционные шахты”? Неужели кому-то пришло в голову вентилировать мумию?

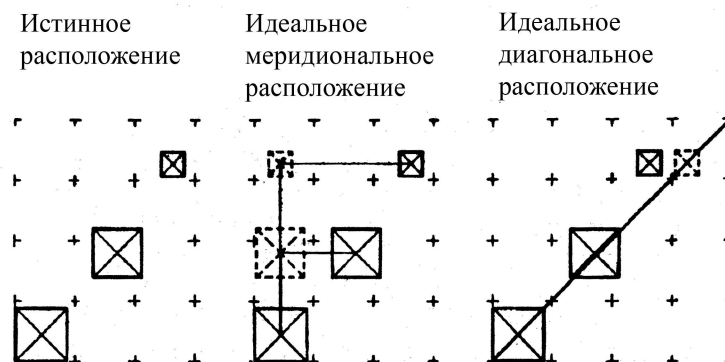


Рис. 17. Расположение пирамид Гизе

Ответ на второй и третий вопросы достаточно прост – пирамиды возводились по заранее известному архитектурному плану. В самом деле – не говоря уже о том, что Менкаура был не менее могущественный фараон, чем Хуфу и Хафра (предположения о том, что он правил недолго или болел, легко опровергаются имеющимися источниками), очевидно, что при сроке строительства пирамиды от семи до десяти лет Менкаура уже в начале строительства знал, что его пирамида будет много ниже, чем две ранее построенные в Гизе.

Естественно, архитектурный план мог существовать только в русле идеологии того времени, а именно, идеологии культа перерождения. Отсюда напрашивается ответ и на первый вопрос – **пирамиды не являлись гробницами, а были погребальными сооружениями исключительно ритуального характера.** Мумия (как царя, так и царицы) находилась в пирамиде только на время осуществления необходимых обрядов. Так что ответ на первый вопрос тоже достаточно понятен и логичен.

Для того чтобы понять, какие ритуалы могли (и должны были) производиться в пирамидах, необходимо обратиться к одному из старейших

письменных источников – “Текстам пирамид” (первый фрагмент был найден Гастоном Масперо в пирамиде Унаса 28 февраля 1881 года). Пирамиды V и VI династий в Саккара дали почти 4000 строк гимнов и заклинаний, которые предназначались для того, чтобы гарантировать возвращение к жизни усопшего фараона, как вернулся к жизни Осирис-Орион.

Мы не будем вдаваться в тонкости отождествления фараона с Осирисом, так же, как и отождествления царицы с Изидой. Для нас гораздо интереснее, что, по древнеегипетским верованиям, боги обитают на звездах, причем Осирис ассоциируется с тремя звездами пояса Ориона (Ал-Нитак – ζ Ориона, Ал-Нилам – ε Ориона и Минтака – δ Ориона), а Изида – с Сириусом (α Большого Пса). В “Текстах пирамид” сказано: “О, Гор, эти звездные души усопших царей – это Орион-Осирис, эти их пирамиды – Орион-Осирис, эти их сооружения – Орион-Осирис”, причем эта фраза присутствует в различных фрагментах, явно относясь не к одному только фараону, а являясь элементом культа всех фараонов. Второй фрагмент процитированной фразы ясно указывает на то, что “пирамиды – Орион-Осирис”. И полное совпадение панорамы пирамид Гизе с фотографией трех звезд пояса Ориона свидетельствует о том, что **“поле пирамид” представляет собой карту участка звездного неба, в котором находится Орион** – не только расположение пирамид идентично расположению звезд, но и яркость звезд соответствует размерам пирамид. Далее, в Дашуре, южной части Мемфисского некрополя, находятся две большие пирамиды Снофру, а в Завиет-эль-Аршане и Абу-Руваше располагаются еще две пирамиды, принадлежащие фараонам Небка и Джедефра. Абу-Руваш в точности соответствует κ Ориона, Завиет-эль-Аршан – γ Ориона (Беллатрикс). Северная часть Мемфисского некрополя дает точные соответствия “ломаной” пирамиды звезде ε Ориона и “красной” пирамиды Альдебарану (α Тельца), символизируя царство “темного и злого” бога Сета. Река Нил соответствует Млечному Пути, и так далее... [50].

Но вернемся к “вентиляционным шахтам”. Еще в 1881 году угол наклона шахт был измерен с помощью орудийного квадранта ученым Питри. Исследования показали, что шахты не выходят за пределы пирамид (что полностью исключает их предназначение для вентиляционных целей). Впрочем, некоторые ученые полагали, что эти шахты, как и сами погребальные камеры, были недостроены и брошены. Тем не менее в 1993 году Рудольфом Гантенбринком были проведены новые исследования шахт, причем для видеосъемки и точных измерений использовался специальный самодвижущийся робот на гусеницах (малый диаметр шахт исключает проникновение в них человека). При этом угол наклона

южной шахты камеры царя составил $45^{\circ}00'00''$, северной шахты камеры царя – $32^{\circ}28'00''$, южной шахты камеры царицы – $39^{\circ}30'00''$. Если верна гипотеза об отождествлении фараона Осирису-Ориону и царицы Изиде-Сириусу и о ритуальном назначении пирамид, то назначение шахт можно почти однозначно определить как “канал связи” тел фараона и царицы и их звездных “двойников”. В этом случае шахты должны иметь вполне определенное направление: Ал-Нитак (ζ Ориона, южная шахта фараона), Тубан (α Дракона, северная шахта фараона), Сириус (α Большого Пса, южная шахта царицы). Северная шахта царицы должна быть направлена на “ковш” Малой Медведицы, точнее – на звезду Кохаб (α Малой Медведицы). Ориентация шахт показана на рис. 18.

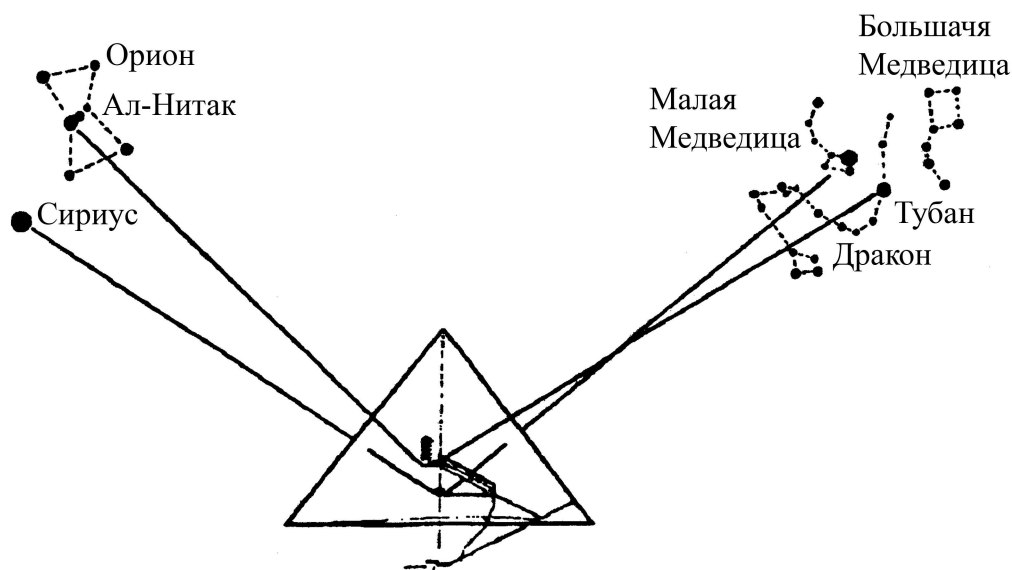


Рис. 18. Ориентация четырех шахт в Великой пирамиде

Особо подчеркнем – шахты должны быть направлены в те точки неба, где эти звезды находились в кульминации в эпоху постройки пирамид. Тщательный учет прецессии позволил вычислить точное время постройки пирамид – 2450 ± 25 гг. до н. э., причем даты совпали для всех четырех направлений!

Рассматривая построенную “модель” некрополя в целом и учитывая, что на месте некоторых “отсутствующих” звезд при проверке гипотезы были найдены фундаменты небольших пирамид (полностью разрушенных или недостроенных), можно считать, что для хронологической гипотезы Морозова-Фоменко просто не остается места. Для исторической науки независимыми методами найден точный нуль-пункт отсчета времени.

Литература

- [1] Зайцев В. Ф. Биоритмы творчества. – Л.: Знание, 1989.
- [2] Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. – М.: Наука, 1994.
- [3] Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Рассказы о прикладной математике. – М.: Наука, 1979.
- [4] Гурев Г. А. Системы мира. – М.: Московский рабочий, 1930.
- [5] Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. – М.: Наука, 1968.
- [6] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.
- [7] Некрасов Б. В. Основы общей химии, т. 1–3. – М.: Химия, 1969.
- [8] Коттон Ф., Уилкинсон Дж. Современная неорганическая химия, ч. 1–3. – М.: Мир, 1969.
- [9] Алешин Г. Я., Зайцев В. Ф., Шестаков С. М. Экспериментальные исследования процесса взрыва в расплавленных солях // ФГВ АН СССР, **6**, 1981. – С. 95-99.
- [10] Алешин Г. Я., Зайцев В. Ф. Содорегенерационный котел, класс F22B 1/20, авторское свидетельство №3453298/24-06 (104531), 7.01.83.
- [11] Лагодинский В. М. Голоморфные функции локальных дифференциальных операторов и дифференциальные уравнения бесконечного порядка // “Дифференциальные уравнения и процессы управления”, №4, 1998. – Электронный журнал. Рег. н.: П23275 от 07.03.1997. – <http://www.neva.ru/journal>.
- [12] Лагодинский В. М. О линейных дифференциальных уравнениях бесконечного порядка и возможной модификации релятивистской квантовой механики // “Вопросы математической физики и прикладной математики”. – СПб: ФТИ им. А. Ф. Иоффе. – С. 190-207.
- [13] Тейлер Р. Строение и эволюция звезд. – М.: Мир, 1973.
- [14] Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. – М.: Наука, 1967.
- [15] Зайцев В. Ф. Введение в современный групповой анализ, ч. 1, 2. – СПб: РГПУ им. А. И. Герцена, 1996.
- [16] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1987.
- [17] Грюнбаум Б., Шепард Дж. Ч. Некоторые проблемы, связанные с плоскими мозаиками // “Математический цветник”. – М.: Мир, 1983.
- [18] Уэллс А. Структурная неорганическая химия, т. 1–3. – М.: Мир, 1987.

- [19] Зайцев В. Ф., Кормилицына Т. В. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений, ч.2. – Л.: ЛГПИ, деп. в ВИНТИ №3720-85Деп. от 29.05.85. – 150 с.
- [20] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976.
- [21] Шевелев И. Ш., Марутаев М. А., Шмелев И. П. Золотое сечение. – М.: Стройиздат, 1990.
- [22] Модр Антонин. Музыкальные инструменты. – М.: Музгиз, 1959. – С. 70.
- [23] Удальцова З. В. Византийская культура. – М.: Наука, 1988. – С. 103.
- [24] Шилов Г. Е. Простая гамма. Устройство музыкальной шкалы. – М.: ГИФМЛ, 1963.
- [25] Schmieder Wolfgang. Thematisch-systematisches Verzeichnis der Werke Johann Sebastian Bachs. – Leipzig: Breitkopf und Hartel, 1971, 748 p.
- [26] Онеггер А. Я – композитор. – Л.: Музгиз, 1963.
- [27] Стахов В. П. Скрипка и ее мастера в наши дни. – Л.: Музыка, 1978.
- [28] Пухначев Ю. В. Загадки звучащего металла. – М.: Наука, 1974.
- [29] Кузнецов Л. А. Акустика музыкальных инструментов. – М.: Легпромбытиздат, 1989.
- [30] Зайцев В. Ф., Хованов Н. В. Об одной формальной модели поисковой активности. – Л.: ЛГУ, ВИНТИ №1719-80 от 28.04.1980 г., 44 с.
- [31] Köchel L. von. Chronologisch-thematisches Verzeichnis der Werke W.A.Mozarts. – Leipzig: Breitkopf und Hartel, 1975, 984 p.
- [32] Kinsky G. Das Werk Beethovens. Thematisch-bibliographisches Verzeichnis seiner sämtlichen vollendeten Kompositionen. – München-Duisburg: 1955.
- [33] Зайцев В. Ф. Исследование одной системы, моделирующей творческую активность // Межвузовский сборник “Математические методы исследования управляемых механических систем”. – Л., ЛГУ, 1982. – С. 72-77.
- [34] Пэрна Н. Я. Ритм жизни и творчества. – Л.: Петроград, 1925.
- [35] Дьяконов И. М. О методах дешифровки древних текстов // “Тайны древних письмен”. – М.: Прогресс, 1976. – С. 16.
- [36] Чэдуик Дж. Дешифровка линейного письма Б – там же. – С. 105-251.
- [37] Кондратов А. М. Этруски: загадка номер один. – М.: Знание, 1977.
- [38] Немировский А. И. Этруски. От мира к истории. – М.: Наука, 1983.
- [39] Молчанов А. А. Таинственные письма первых европейцев. – М.: Наука, 1980.
- [40] Ипсен Г. Фестский диск (опыт дешифровки) // “Тайны древних письмен”. – М.: Прогресс, 1976. – С. 32-65.

- [41] Нойман Г. К современному состоянию исследования фестского диска – там же. – С. 66-82.
- [42] Фридрих И. Дешифровка забытых письменностей и языков. – М.: ИЛ, 1961.
- [43] Бражников М. В. Статьи о древнерусской музыке. – Л.: Музыка, 1975.
- [44] Федор Крестьянин. Стихиры. Публикация, расшифровка и исследование М.В.Бражникова. – М.: Музыка, 1974.
- [45] Зайцев В. Ф., Щепановская Е. М. О статистическом подходе к дешифровке древнерусских музыкальных рукописей. – Л.: ЛГУ, ИНИОН АН СССР №15994 от 15.03.1984, 17 с.
- [46] Хохлов Ю. Н. Шуберт. Некоторые проблемы творческой биографии. – М.: Музыка, 1972.
- [47] Ямпольский И. Фриц Крейслер. – М.: Музыка, 1975.
- [48] Ваганов П. А. Физики дописывают историю. – Л.: ЛГУ, 1984.
- [49] Валянский С. И., Калюжный Д. В. Новая хронология земных цивилизаций. Современная версия истории. – М.: АСТ “Олимп”, 1996.
- [50] Бьювэл Р., Джилберт Э. Секреты пирамид. Созвездие Ориона и фараоны Египта. – М.: Вече, 1997.

EqWorld

Мир математических уравнений

<http://eqworld.ipmnet.ru>

Редактор: А. Д. Полянин



Уравнения занимают центральное место в современной математике и являются основой для математического моделирования многочисленных явлений и процессов в науке и технике.

Веб-сайт EqWorld содержит обширную информацию о решениях различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений с частными производными (УрЧП), интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений. Описаны также некоторые методы решения уравнений, приведены интересные статьи, даны ссылки на математические справочники и монографии, указаны адреса научных веб-сайтов, издательств, журналов и др. Сайт постоянно пополняется новыми уравнениями, точными решениями и другой полезной информацией.

Веб-сайт EqWorld предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики, механики, физики и инженерных наук и является бесплатным для его пользователей.

- Точные решения
- Методы решения
- Вспомогательные разделы
- Программы
- Образование
- Об этом сайте
- Для авторов
- Информация

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие автора	3
Глава 1. Основные принципы моделирования	4
1.1. Определение и свойства моделей	4
1.2. Принцип единства и множественности моделей	5
1.3. Основные требования к модели	7
1.4. Классификация моделей	10
1.5. Математическая адекватность модели	12
1.6. Аналогия	17
Глава 2. От псевдокристаллов до численности грызунов.	22
2.1. Взрыв расплавленной поваренной соли	22
2.2. Проблемы квантовой механики в релятивистской области	29
2.3. Некоторые проблемы эволюции звезд	32
2.4. Симметрия как фундаментальное свойство	43
2.5. Экологическая модель: “хищник – жертва”	50
2.6. Экологическая модель: конкуренция за корм	52
2.7. Альтернативные системы жизни	54
2.8. Золотое сечение и ряд Фибоначчи	60
Глава 3. Моделирование в гуманитарных науках	64
3.1. Математика и музыка: от Пифагора к XXI веку	64
3.2. Биоритмы и внутренние взаимосвязи в музыкальном творчестве	69
3.3. Дешифровка старинной музыки	82
3.4. Проблема авторства, восстановление утраченной части сочинения	94
3.5. Проблема нуль-пункта временной оси	102
Литература	107
EqWorld	110
Содержание	111

ООО “Книжный Дом”
Лицензия на издательскую деятельность
Серия ИД №05377 от 16.07.2001 г.
191186 Санкт-Петербург, ул. М. Конюшенная 5
тел. (812)380-73-00, 380-73-22

Подписано в печать 20.08.2006	Формат 60×84 1/16	
Бумага офсетная	Объем 7 уч. изд. л.	Тираж 100 экз.
